Développement asymptotique de la série harmonique

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, page 145

Exercice : On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

1. Soit $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Démontrer que ces suites sont adjacentes et convergent vers une constante réelle strictement positive γ.
2. Déterminer un développement asymptotique de H_n comprenant quatre termes.
3. On pose $k_n = \min\{k \in \mathbb{N}\ ,\ H_k \geq n\}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n}$.

1. La différence $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est positive et converge vers 0. La suite $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante puisque

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$$

en vertu de l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$. D'autre part, cette même inégalité assure la croissance de $(v_n)_{n\geq1}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

Les deux suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ sont donc adjacentes, et elles convergent vers un réel γ. Comme $v_2 = 1 - \ln 2 > 0$, on a $\gamma > 0$.

On a donc

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + 0(1)} \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers } +\infty$$

2. • Posons $t_n = u_n - \gamma$ $(n \geq 1)$. On emploie une méthode classique qui consiste, pour obtenir un équivalent de t_n, à chercher un équivalent de $t_n - t_{n-1}$, puis à "sommer" l'équivalent obtenu. On a pour n tendant vers l'infini,

$$t_n - t_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

La série $\sum(t_k - t_{k-1})$ converge. Le théorème de sommation des équivalents nous donne :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

l'équivalent du reste de la série de Riemann s'obtenant à l'aide d'une simple comparaison série-intégrale :

Théorème de comparaison série-intégrale des séries de Riemann : *Si $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissance et intégrale sur $[1, +\infty[$, si bien que pour $k \geq 2$,*

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

En sommant cela entre $n+1$ et N, puis en faisant tendre N vers l'infini, on obtient

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

Comme les membres de gauche et de droite sont tous deux équivalents à $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, le théorème d'encadrement assure que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Le cas $\alpha = 2$ donne l'équivalent annoncé. On a donc déjà

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

• On pose $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$, suite qui converge vers 0. La somme $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1})$ vaut $-w_n$ et son terme général s'écrit

$$w_n - w_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$$

Pour n tendant vers l'infini, on a

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= \frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}
\end{aligned}$$

Le théorème de sommation des équivalents donne

$$-w_n \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

Ainsi, on obtient le développement asymptotique :

$$\boxed{H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

3. Pour estimer k_n, on va utiliser le début du développement asymptotique de H_n. On sait que $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ où (ε_n) tend vers 0. Par définition de k_n, on a

$$\ln k_n + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geq n$$

et

$$\ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n - 1} < n$$

Il en résulte, en passant à l'exponentielle, que

$$e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n-1}} + 1 > k_n \geq e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n}}$$

On a donc $k_n \sim e^n e^{-\gamma}$ et

$$\boxed{\lim_{n\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e}$$