Décomposition de Dunford

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 2*, page 112

Théorème : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E. Alors il existe un et un seul couple (d, n) d'endomorphismes de E tels que :

1. $u = d + n$
2. d et n commutent
3. d est diagonalisable et n est nilpotent.

De plus, d et n sont des polynômes en u.

• Traitons d'abord l'existence du couple (d, n). Ecrivons

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

avec les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et les entiers $m_i \geq 1$. D'après le théorème de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, E est somme directe des sous-espaces caractéristiques $F_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i Id)^{n_i}$:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

Soit d l'endomorphisme de E dont la restriction à F_i est exactement $\lambda_i Id_{F_i}$: autrement dit, d est diagonalisable et admet chaque sous-espace F_i comme espace propre pour la valeur propre λ_i. Posons $n = u - d$. Il ne reste plus qu'à vérifier que n est nilpotent et commute avec d. Comme chaque sous-espace caractéristique de E est stable par u et par d (donc aussi par n), il suffit de le vérifier pour les restrictions aux F_i. Notons avec un indice i les restrictions à F_i. On a $u_i = d_i + n_i$ et $d_i = \lambda_i Id_{F_i}$. Or, par définition de F_i, $(u_i - \lambda_i Id_{F_i})^{m_i} = 0$. Donc n_i est nilpotent et commute clairement avec l'homothétie d_i. D'où le résultat. Le couple (d, n) convient donc.

Avant de prouver l'unicité, vérifions que d et n sont des polynômes en u. Cela se voit dans la démonstration du théorème de décomposition des noyaux : pour tout i la projection π_i sur F_i parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques est un polynôme en u. Or, par construction, on a simplement pris

$$d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i \in \mathbb{C}[u]$$

Bien entendu $n = u - d$ est alors aussi dans $\mathbb{C}[u]$.

• Supposons l'existence d'un autre couple (d', n') répondant au problème. On a alors $d' - d = n - n'$. Comme d' commute avec n', il commute aussi avec u, donc avec tout polynôme en u. En particulier d' commute avec d. Ainsi d et d' sont codiagonalisables et donc $d' - d$ est diagonalisable. De même n commute avec n'. Il en découle que $n - n'$ est nilpotent. Le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent étant 0 on a $d = d'$ et $n = n'$.