Décomposition canonique d'une isométrie

Combes, *Algèbre et géométrie*, page 163

Théorème : Soit f une isométrie de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_n$. Notons E l'espace euclidien, direction de $\mathcal{E}_n$. Il existe une isométrie g de $\mathcal{E}_n$ admettant un point fixe, et un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(v_f - Id)$, uniques, tels que $f = t_{\overrightarrow{x}} \circ g$. C'est la seule expression $f = t_{\overrightarrow{x}} \circ g$ où $g \in Aut(\mathcal{E}_n)$ a un point fixe et commute avec $t_{\overrightarrow{x}}$. Cette décomposition s'appelle la *forme canonique de f*.

Lemme : *Soient E un espace vectoriel euclidien et $v \in O(E)$. Alors*

$$\mathrm{Ker}(v - Id_E) = [\mathrm{Im}(v - Id_E)]^\perp$$

Démo du Lemme : Soient $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(v - Id_E)$ et $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(v - Id_E)$. Il existe $\overrightarrow{z} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = v(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$. Utilisons le fait que ${}^t v = v^{-1}$ car v est orthogonale, et que v^{-1} laisse $\overrightarrow{x}$ fixe. On a

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) &= (\overrightarrow{x}|v(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x}|v(\overrightarrow{z})) - (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{z}) \\
&= (v^{-1}(\overrightarrow{x})|\overrightarrow{z}) - (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{z}) - (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{z}) = 0
\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Ker}(v - Id_E) \subset [\mathrm{Im}(v - Id_E)]^\perp$. Cette inclusion est une égalité, car d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(v - Id_E)) = n - \dim(\mathrm{Im}(v - Id_E)) = \dim([\mathrm{Im}(v - Id_E)]^\perp)$.

Démonstration du théorème :

Soient $A \in \mathcal{E}_n$ et $A' = f(A)$. Posons $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AA'}$. D'après le lemme, il existe $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(v_f - Id_E)$ et $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(v_f - Id_E)$ tels que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. Soit $\overrightarrow{z} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = v_f(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$. Vérifions que $B = A + (-\overrightarrow{z})$ est fixe par $g = t_{-\overrightarrow{x}} \circ f$.

$$\begin{aligned}
g(B) &= f(B) + (-\overrightarrow{x}) = f(A + (-\overrightarrow{z})) + (-\overrightarrow{x}) = f(A) - v_f(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{x} \\
&= A + \overrightarrow{a} - v_f(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{x} = A + \overrightarrow{y} - v_f(\overrightarrow{z}) = A + (-\overrightarrow{z}) = B
\end{aligned}$$

Montrons l'unicité de cette décomposition de f. Soit $f = t_{\overrightarrow{x'}} \circ g'$ une autre expression, où g' admet un point fixe B', et où $\overrightarrow{x'} \in \mathrm{Ker}(v_f - Id_E)$. Puisque $f(B') = B' + \overrightarrow{x'}$ et $f(B) = B + \overrightarrow{x}$, on a $v_f(\overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x}$. Cela montre que $\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}(v_f - \mathrm{Id}_E)$. On a aussi $\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(v_f - Id_E)$, et donc $\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ d'après le lemme. Ensuite, la relation $f = t_{\overrightarrow{x}} \circ g = t_{\overrightarrow{x'}} \circ g'$ donne $g = g'$.

Pour tout $M \in \mathcal{E}_n$, en tenant compte du fait que $\overrightarrow{x}$ est fixe pour $v_f = v_g$, on a

$$g \circ t_{\overrightarrow{x}}(M) = g(M + \overrightarrow{x}) = g(M) + v_g(\overrightarrow{x}) = g(M) + \overrightarrow{x} = (t_{\overrightarrow{x}} \circ g)(M)$$

Cela prouve que $t_{\overrightarrow{x}}$ et g commutent.

Réciproquement, si $f = t_{\overrightarrow{x}} \circ g$, où g a un point fixe B, et où $t_{\overrightarrow{x}}$ et g commutent, on a

$$\begin{aligned}
B + \overrightarrow{x} &= g(B) + \overrightarrow{x} &= (t_{\overrightarrow{x}} \circ g)(B) &= (g \circ t_{\overrightarrow{x}})(B) \\
&= g(B + \overrightarrow{x}) &= g(B) + v_g(\overrightarrow{x}) &= B + v_g(\overrightarrow{x})
\end{aligned}$$

On voit que $v_f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$. L'unicité déjà démontrée, concernant cette propriété, montre que $f = t_{\overrightarrow{x}} \circ g$ est la décomposition précédente.

Application : Soit f une isométrie de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$. Supposons que f^n, où $n \geq 2$, ait un point fixe. Alors f a un point fixe.

En effet, supposons que f^n ait un point fixe. D'après le théorème, $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. Puisque $t_{\overrightarrow{u}}$ et g commutent, on a $f^n = t_{n\overrightarrow{a}} \circ g^n$ avec $t_{n\overrightarrow{a}}$ et g^n qui commutent et g^n qui a un point fixe car g en a un. D'après l'unicité de la forme canonique de f^n, si f^n a un point fixe, alors $t_{n\overrightarrow{a}} = t_{\overrightarrow{0}}$. Ainsi $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et $f = g$ a un point fixe.