Décomposition polaire

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 3*, page 177

Théorème :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe une unique matrice $H \in H_n^+$ telle que $A^*A = H^2$.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe un unique couple $(U, H) \in U_n \times H_n^+$ tel que $A = UH$.

   De plus, la matrice U ainsi définie vérifie :
   $$\|A - U\| = d(A - U_n)$$
   pour la distance induite par la norme $M \mapsto \sqrt{tr(M^*M)}$.

Preuve :

1. **Existence**. Soit $M = A^*A$. La matrice M est hermitienne positive. En particulier la matrice M est diagonalisable dans une base orthonormale : il existe $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale à terme diagonaux positifs et $P \in U_n$ telles que
   $$M = PDP^*$$
   On écrit $D = \Delta^2$ avec $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et ainsi $M = P\Delta^2P^* = (P\Delta P^*)^2$. La matrice $H = P\Delta P^*$ convient donc.

   Unicité. Soit H' une autre matrice répondant à la question : elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont nécessairement les racines carrées de celles de D. Elle est donc semblable à la matrice Δ : il existe $Q \in U_n$ telle que $H' = Q\Delta Q^*$. On en déduit donc que :
   $$M = PDP^* = H'^2 = Q\Delta^2Q^* = QDQ^*$$
   ce qui peut encore s'écrire :
   $$Q^*PD = DQ^*P$$
   Si on pose $Q^*P = (a_{i,j})$, on a pour $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij}\lambda_i = \lambda_j a_{ij}$. Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors $a_{ij} = 0$. Mais dans tous les cas, on a $a_{ij}\sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda_j}a_{ij}$ et donc $Q^*P\Delta = \Delta Q^*P$, ce qui nous donne bien que $P\Delta P^* = Q\Delta Q^*$, soit $H = H'$, ce qui montre l'unicité.

2. **Unicité**. Si $A = UH$ avec $U \in U_n$ et H hermitienne positive, alors $A^*A = HU^*UH = H^2$. La matrice H répond donc à la question précédente : elle est unique. La matrice H étant inversible puisque A l'est, $U = AH^{-1}$ est uniquement déterminée.

   Existence. On prend H la racine carrée de A^*A définie précédemment. Ici H est hermitienne définie positive car inversible comme A^*A. On peut poser $U = AH^{-1}$. Vérifions que U est unitaire.
   $$U^*U = H^{-1}A^*AH^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I_n$$

   On considère la norme définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\|A\| = \sqrt{tr(A^*A)}$. En gardant les notations précédentes, on écrit $H = P^*\Delta P$ (où P est unitaire et $\Delta = diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu_i \in \mathbb{R}^+$.
   $$\|A - U\|^2 = \|U(H - I_n)\|^2 = \|H - I_n\|^2 = tr(H - I_n)^2 = tr(\Delta - I)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i - 1)^2$$
   Soit $V \in U_n$. On obtient :
   $$\|A - V\| = \|UH - V\| = \|V^{-1}UH - I_n\| = \|V^{-1}UP^*\Delta P - I_n\| = \|P(V^{-1}UP^*\Delta P - I_n)P^*\| = \|PV^{-1}UP^*\Delta - I_n\|$$
   On pose $W = PV^{-1}UP^*$ qui est une matrice unitaire. On obtient :
   $$\begin{aligned} \|A - V\|^2 = \|W\Delta - I_n\|^2 &= tr(\Delta W^*W\Delta - W\Delta - \Delta W^* + I_n) \\ &= tr(\Delta^2 - W\Delta - \Delta W^* + I_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\mu_i^2 - (\omega_{ii} + \overline{\omega_{ii}})\mu_i + 1) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}(\mu_i^2 - 2\mu_i + 1) = \|A - U\|^2 \end{aligned}$$
   (car $\sum |\omega_{ii}|^2 = 1$ implique $Re(\omega_{ii}) \leq |\omega_{ii}| \leq 1$.)
   L'égalité a lieu si $\omega_{ii} = 1$ pour tout i, et donc $W = I_n$. On a alors $V^{-1}U = I_n$ et donc $V = U$.