Définition bifocale des coniques à centre

Monier, *Géométrie MPSI*, page 119

Théorème :
Soit E un espace affine euclidien orienté. Soient $F, F' \in E$ distincts, et $a > 0$. Alors :

1. L'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in E,\ MF + MF' = 2a\}$ est une ellipse de foyers F,F' (si $a > \dfrac{FF'}{2}$)
2. L'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in E,\ |MF - MF'| = 2a\}$ est une hyperboles de foyers F,F' (si $a < \dfrac{FF'}{2}$)

On note O le milieu de FF', $c = OF$, $\overrightarrow{i} = \frac{1}{c}\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{j} = \text{rot}_{\pi/2}(\overrightarrow{i})$.
Ainsi, dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a :

$$F(c, 0), F'(-c, 0)$$

1. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$FF' \leq MF + MF'$$

Ainsi, si $a < c$, on a $\mathcal{C} = \emptyset$. Si $a = c$, alors $\mathcal{C} = [FF']$ (le segment joignant F et F').

Supposons donc $a > c$. On a, pour tout $M(x, y) \in E$:

$$\begin{aligned}
MF.MF' = 2a &\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \\
&\iff (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x-c)^2 + y^2)\,((x+c)^2 + y^2)} = 4a^2 \\
&\iff \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2 \\
&\iff \begin{cases} (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = \big(2a^2 - (c^2 + x^2 + y^2)\big)^2 \\ 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\ x^2 + y^2 \leq 2a^2 - c^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Notons $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (on a $b > 0$). Alors :

$$M \in \mathcal{C} \iff \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2\right)$$

Comme, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x^2 \leq a^2 \\ y^2 \leq b^2 \end{cases} \Longrightarrow x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2$$

On conclut que :

$$M \in \mathcal{C} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En comparant cette équation cartésienne avec l'équation cartésienne d'une conique monofocale :

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = \frac{d^2}{e^2}1 - e^2$$

on voit qu'avec $e = \dfrac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$, et $d = \dfrac{1 - e^2}{e^2}c$, $(d > 0)$, $\mathcal{C}$ est l'ellipse de foyer $F(c, 0)$ et de directrice $D : x = c + d$.
En particulier, comme $c + d = \dfrac{c}{e^2} = \dfrac{a^2}{c}$, D a pour équation cartésienne $x = \dfrac{a^2}{c}$.

2. D'après l'inégalité triangulaire renversée, on a :

$$|MF - MF'| \leq FF'$$

Ainsi, si $a > c$, alors $\mathcal{C} = \emptyset$, et si $a = c$, alors $\mathcal{C} = ((FF')\backslash[FF']) \cup \{F, F'\}$, réunion de deux demi-droites fermées.

Supposons donc $a < c$. On obtient de la même façon que précédemment,

$$|MF - MF'| = 2a \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \\ x^2 + y^2 \geq 2a^2 - c^2 \end{array} \right.$$

Notons $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (on a $b > 0$). On a :

$$M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \geq a^2 - b^2 \right)$$

Comme, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow x^2 \geq a^2 \Longrightarrow a^2 + y^2 \geq a^2 \geq a^2 - b^2$$

On conclut :

$$M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow\Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En comparant cette équation cartésienne avec l'équation cartésienne d'une conique monofocale :

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 = \frac{d^2}{e^2}e^2 - 1$$

on voit qu'avec $e = \dfrac{c}{a}$ ($e > 1$) et $d = \dfrac{e^2 - 1}{e^2}c$ ($d > 0$), $\mathcal{C}$ est l'hyperbole de foyer $F(c, 0)$ et de directrice $D : x = c - d$.
En particulier, comme $c - d = \dfrac{c}{e^2} = \dfrac{a^2}{c}$, D a pour équation cartésienne : $x = \dfrac{a^2}{c}$.