Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, page 51

Théorème :
Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$.

1. $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. $Int(\mathcal{D}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$.
3. $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a $M \in \mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ si et seulement si son polynôme caractéristique χ_M n'admet que des racines simples dans $\mathbb{C}$, ce qui équivalent à dire que $\varphi(M) = Res(\chi_M, \chi'_M) \neq 0$. L'ensemble $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{C}^*$ par l'application continue φ (φ est continue en tant que fonction polynomiale des coefficients de M).

2. Une matrice ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Donc $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. D'autre part, on sait que $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donc $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C}) \subset Int(\mathcal{D}_n(\mathbb{C}))$.

   Supposons qu'il existe $A \in Int(D_n(\mathbb{C}))$ ayant une valeur propre λ d'ordre supérieur ou égal à 2. On peut alors trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & & & & 0 \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Pour tout entier $k > 0$, on pose

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad D_k = \begin{pmatrix} \Delta_k & & & 0 \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Le polynôme minimal de D_k est un multiple de celui de Δ_k, c'est-à-dire de $(x - \lambda)^2$ (si $P(D_k) = 0$, alors $P(\Delta_k) =$ et P est un multiple de π_{Δ_k}). En conséquence, la matrice D_k et la matrice $A_k = PD_kP^{-1}$ ne sont pas diagonalisables (une matrice est diagonalisable si et seulement son polynôme minimal est scindé à racines simples). Comme $A = \lim\limits_{k\infty} A_k$, on ne peut pas avoir $A \in Int(\mathcal{D}_n(\mathbb{C}))$. Donc toutes les matrices de $Int(\mathcal{D}_n(\mathbb{C}))$ ont n valeurs propres distinctes et $Int(\mathcal{D}_n(\mathbb{C})) \subset \mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$. En définitive, on a bien l'égalité $Int(\mathcal{D}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$.

3. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & t_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{telles que } A = PTP^{-1}$$

   On pose alors :

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si} t_{ii} = t_{jj} \text{ pour tous } i \neq j \text{ dans } \{1, \ldots, n\} \\ \inf\{|t_{ii} - t_{jj}| \ , \ , 1 \leq i, j \leq n, t_{ii} \neq t_{jj}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on définit la suite de matrices $(T_k)_{k\geq 1}$ par $T_k = T + \Delta_k$, où

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{k} & & & 0 \\ & \frac{\alpha}{2k} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\alpha}{nk} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $k > 0$, la matrice T_k a toutes ses valeurs propres distinctes (si $t_{ii} + \dfrac{\alpha}{ik} = t_{jj} + \dfrac{\alpha}{jk}$ avec $t_{ii} \neq t_{jj}$, alors

$$|t_{ii} - t_{jj}| = \frac{\alpha}{k}\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right| < \frac{\alpha}{k} \leq \alpha$$

ce qui contredit la définition de α et donc $T_k \in \mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ et elle est en particulier diagonalisable. On a alors, avec la continuité du produit matriciel, $A = \lim\limits_{k\infty} A_k$, où pour tout $k > 0$, la matrice $A_k = PT_kP{-}1$ est dans $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ et diagonalisable. D'où la densité de $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. Le résultat précédent est faux sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans le cas $n = 2$, l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le discriminant de son polynôme caractéristique :

$$\varphi(M) = (a-d)^2 + 4bc$$

(résultat de χ_M et χ'_M) est continue et :

$$A = \lim_{k\infty} A_k \Longrightarrow \varphi(A) = \lim_{k\infty} \varphi(A_k)$$

Mais pour A_k dans $\mathcal{D}'_2(\mathbb{R})$ ou dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, on a $\varphi(A_k) \geq 0$ et pour A à valeurs propres complexes non réelles, on a $\varphi(A) < 0$. Une telle matrice A ne peut donc être limite d'une suite de matrice de $\mathcal{D}'_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

Application : Théorème de Cayley-Hamilton.
Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note χ_f le polynôme caractéristique de f . Alors

$$\chi_f(f) = 0$$

Preuve :

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, note χ_A son polynôme caractéristique.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = QDQ^{-1}$. Ce qui entraîne :

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda), \quad \chi_A(A) = Q\chi_A(D)Q^{-1} = 0$$

Une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire $A = \lim\limits_{k\infty} A_k$ où $(A_k)_k$ est une suite de matrices diagonalisables. Avec la continuité de l'application $M \mapsto \chi_M(M)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (les composantes de cette application sont des fonctions polynomiales des m_{ij}), on déduit alors que $\chi_A(A) = \lim\limits_{k\infty} \chi_{A_k}(A_k) = 0$.