# Déterminant de Cauchy

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 2*, page 23

**Théorème :** Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_i + \beta_j \neq 0$. Alors :

$$\det\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod\limits_{1 \leq i,j \leq n} (\alpha_i + \beta_j)}$$

**<u>1ère méthode</u>**

On note $D$ le déterminant à calculer. On multiplie chaque colonne $C_j$ par $\alpha_n + \beta_j$, $1 \leq j \leq n$. On obtient :

$$D = \frac{1}{(\alpha_n + \beta_1) \ldots (\alpha_n + \beta_n)} \begin{vmatrix} \frac{\alpha_n+\beta_1}{\alpha_1+\beta_1} & \ldots & \ldots & \frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\alpha_n+\beta_1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \ldots & \ldots & \frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Dans ce dernier déterminant, le terme d'indice $(i, j)$ est pour $i < n$

$$\frac{\alpha_n + \beta_j}{\alpha_1 i + \beta_j} = 1 + \frac{\alpha_n - \alpha_i}{\alpha_i + \beta_j}$$

En retranchant la dernière ligne à toutes les autres, on obtient donc

$$D = \frac{1}{(\alpha_n + \beta_1) \ldots (\alpha_n + \beta_n)} \begin{vmatrix} \frac{\alpha_n-\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1} & \ldots & \ldots & \frac{\alpha_n-\alpha_1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \ldots & \ldots & \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\alpha_n - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})}{(\alpha_n + \beta_1) \ldots (\alpha_n + \beta_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \ldots & \ldots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \ldots & \ldots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

car $\alpha_n - \alpha_i$ est facteur de tous les coefficients de la $i$-ième ligne. Retranchons maintenant la dernière colonne à toutes les autres, on obtient :

$$D = \frac{(\alpha_n - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})}{(\alpha_n + \beta_1) \ldots (\alpha_n + \beta_n)} \begin{vmatrix} \boxed{\left(\frac{\beta_n - \beta_j}{(\alpha_i + \beta_j)(\alpha_i + \beta_n)}\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}} & \times \\ 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et en développant selon la dernière ligne

$$D = \frac{(\alpha_n - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})}{(\alpha_n + \beta_1) \ldots (\alpha_n + \beta_n)} \det\left(\frac{\beta_n - \beta_j}{(\alpha_i + \beta_j)(\alpha_i + \beta_n)}\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}$$

Comme $(\beta_n - \beta_j)$ est en facteur dans la $j$-ième colonne et $(\alpha_i + \beta_n)$ dans la $i$-ième ligne, on a

$$D = \frac{(\alpha_n - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})(\beta_n - \beta_1) \ldots (\beta_n - \beta_{n-1})}{(\alpha_n + \beta_1) \ldots (\alpha_n + \beta_n)(\alpha_1 + \beta_n) \ldots (\alpha_{n-1} + \beta_n)} \det\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}$$

Le résultat découle alors d'une récurrence immédiate sur $n$.

**2ème méthode**

Il s'agit de mettre en action les idées du calcul du déterminant de Vandermonde. Tout d'abord le déterminant est nul dès que deux $\alpha_i$ sont égaux (resp. deux $\beta_j$) puisque deux lignes (resp. deux colonnes) sont alors identiques. Nous supposerons maintenant les $\alpha_i$ (resp. les $\beta_j$) deux à deux distincts.

Posons

$$F(X)=\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \frac{1}{\alpha_1+\beta_2} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_2} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ \frac{1}{X+\beta_1} & \frac{1}{X+\beta_2} & \cdots & \frac{1}{X+\beta_n} \end{vmatrix} \in \mathbb{C}(X)$$

En imaginant le développement de ce déterminant selon la dernière ligne, on convient que $F$ est la somme de $n$ fractions nulles ou de degré $-1$ et donc $\deg F \leq -1$. Toujours avec ce développement, on peut réduire au même dénominateur pour mettre $F$ sous la forme

$$F=\frac{P(X)}{(X+\beta_1)(X+\beta_2)\dots(X+\beta_n)}$$

On a donc $\deg P \leq n-1$. Les $\alpha_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ ne sont pas pôles de $F$ et $F(\alpha_i)=0$ (en substituant $\alpha_i$ à $X$, le déterminant présente deux lignes identiques). Donc $P(\alpha_i)=0$. Les $\alpha_i$ étant deux à deux distincts et $\deg P \leq n-1$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$P=\lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_{n-1})$$

Il s'agit de calculer $\lambda$. Multiplions $F$ par $X+\beta_n$ :

$$(X+\beta_n)F=\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ \frac{X+\beta_n}{X+\beta_1} & \cdots & \frac{X+\beta_n}{X+\beta_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}=\lambda\frac{(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_{n-1})}{(X+\beta_1)\dots(X+\beta_{n-1})}$$

et évaluons en $-\beta_n$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_{n-1}} & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} & \times \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=\lambda\frac{(-1)^{n-1}(\beta_n+\alpha_1)\dots(\beta_n+\alpha_{n-1})}{(-1)^{n-1}(beta_n-\beta_1)\dots(\beta_n-\beta_{n-1})}$$

En développant ce déterminant par rapport à la dernière ligne, il vient

$$1\times\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} \end{vmatrix}=\lambda\frac{(\beta_n+\alpha_1)\dots(\beta_n+\alpha_{n-1})}{(\beta_n-\beta_1)\dots(\beta_n-\beta_{n-1})}$$

d'où

$$\lambda=\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} \end{vmatrix}\frac{(\beta_n-\beta_1)\dots(\beta_n-\beta_{n-1})}{(\beta_n+\alpha_1)\dots(\beta_n+\alpha_{n-1})}$$

Le déterminant cherché, $F(\alpha_n)$ est donc égal à

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} \end{vmatrix}\frac{\prod\limits_{i<n}(\beta_n-\beta_i)\prod\limits_{i<n}(\alpha_n-\alpha_i)}{\prod\limits_{i<n}(\beta_n+\alpha_i)\prod\limits_{i\leq n}(\alpha_i+\beta_n)}$$

On établit par récurrence la formule du déterminant de Cauchy.