Différentielle de l'exponentielle de matrice

Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, page 297

Exercice :

1. Soient E un espace normé de dimension finie, $H \in E, A \in \mathcal{L}(E)$. Résoudre les équations différentielle s:

$$\begin{cases} f'(t) = Af(t) \\ f(0) = H \end{cases} \qquad \begin{cases} g'(t) = e^{tA}H \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

   où les inconnues f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans E.

2. Désormais $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X, H \in E$, on définit $\mathrm{ad}X \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\mathrm{ad}X(H) = XH - HX$$

   Montrer alors que, pour tous $X, H \in E$,

$$e^X He^{-X} = e^{\mathrm{ad}X}H$$

3. On admet que l'application exponentielle $\exp : E \to E$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Soient t et u deux variables réelles et

$$g(t) = \partial_{u=0}\left(e^{-tX}e^{t(X+uH)}\right)$$

   Vérifier que

$$g'(t) = e^{-t\mathrm{ad}X}H \quad , \quad g(0) = 0$$

4. En déduire que

$$D\exp(X)H = e^X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}X)^k}{(k+1)!}H$$

1. On rappelle qu'une série entière convergente en la variable t, à coefficients dans un espace normé de dimension finie, peut être dérivée terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence. En particulier

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

   La première équation de l'énoncé entraîne

$$(e^{-tA}f(t))' = e^{-tA}f'(t) - e^{-tA}Af(t) = 0$$

   d'où $e^{-tA}f(t) = e^0 f(0) = H$ et

$$f(t) = e^{tA}H$$

   la réciproque est immédiate.

   Pour obtenir g, on doit intégrer terme à terme la série de l'exponentielle, d'où

$$g(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}A^k}{(k+1)!}\right)H$$

   (on pourrait abréger en $(e^{tA} - I)/A$ l'endomorphisme entre parenthèses). En effet les fonctions des deux membres ont même dérivée $e^{tA}H$ et s'annulent toutes deux en $t = 0$.

2. En dérivant $f(t) = e^{tX}He^{-tX}$, on trouve

$$f'(t) = Xe^{tX}He^{-tX} - e^{tX}He^{-tX}X = \mathrm{ad}X(f(t))$$

   D'après 1, avec $A = \mathrm{ad}X \in \mathcal{L}(E)$ et $f(0) = H$, on en déduit $f(t) = e^{t\mathrm{ad}X}H$, d'où le résutat en prenant $t = 1$.

3. D'abord $g(0)=\partial_{u=0}\left(e^0e^0\right)$. Comme exp est de classe $\mathcal{C}^2$, il en est de même pour l'application

$$(t,u)\mapsto e^{-tX}e^{t(X+uH)}$$

de $\mathbb{R}^2$ dans E. On peut donc permuter les dérivées secondes par le théorème de Schwarz, d'où

$$\begin{aligned} g'(t) &= \partial_t\partial_{u=0}\left(e^{-tX}e^{t(X+uH)}\right)=\partial_{u=0}\partial_t\left(e^{-tX}e^{t(X+uH)}\right) \\ &= \partial_{u=0}\left(-e^{-tX}Xe^{t(X+uH)}+e^{-tX}(X+uH)^{t(X+uH)}\right) \\ &= \partial_{u=0}\left(ue^{-tX}He^{t(X+uH)}\right)=e^{-tX}He^{tX} \end{aligned}$$

puisque la dérivée en $u=0$ d'une expression de la forme $uF(u)$ est simplement $F(0)$. Le résultat demandé se déduit alors de 2, où on remplace X par $-tX$.

4. D'après 3 et 1, avec $A=-\mathrm{ad}X$ et $t=1$, on a

$$g(1)=\partial_{u=0}(e^{-X}e^{X+uH})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{ad}X)^k}{(k+1)!}H$$

Comme exp est différentiable en X, on a par aileurs

$$\partial_{u=0}(e^{-X}e^{X+uH})=e^{-X}D\exp(X)H$$

d'où le résultat en rapprochat ces deux expressions.