Théorème de Desnanot-Jacobi - Algorithme de Dodgson

Bressoud, *Proofs and confirmations*, page 111

> **Théorème de Desnanot-Jacobi (de la matrice adjointe):**
> Soit M est une matrice $n \times n$.On note M_i^j la matrice M privée de la ligne i et de la colonne j, et $|M| = \det(M)$.
> Alors :
> $$|M| \times |M_{1,n}^{1,n}| = |M_1^1| \times |M_n^n| - |M_n^1| \times |M_1^n|$$

Preuve : Soit M une matrice $n \times n$, et désignons par ${}^t com(M)$ sa comatrice, *i.e.* la matrice dont le terme (i, j) est au signe près le déterminant de M_j^i :

$$ {}^t com(M) = \begin{pmatrix} |M_1^1| & -|M_1^2| & \cdots & (-1)^{n+1}|M_1^n| \\ -|M_2^1| & |M_2^2| & \cdots & (-1)^{n+2}|M_2^n| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1}|M_n^1| & (-1)^{n+2}|M_n^2| & \cdots & |M_n^n| \end{pmatrix} $$

Si on prend le produit de la i-ème ligne de M avec la i-ème colonne de la comatrice transposée, on obtient

$$(-1)^{i+1}\left(m_{i1}|M_1^i| - m_{i2}|M_2^i| + \ldots + (-1)^{n-1}m_{in}|M_n^i|\right) = |M|$$

D'autre part, si on prend le produit de la j-ème ligne de M avec la i-ème ligne de ${}^t com(M)$, $j \neq i$, cela donne le déterminant de la matrice dans laquelle la ligne i est une copie de la ligne j, et est donc de déterminant nul :

$$m_{j1}|M_1^i| - m_{j2}|M_2^i| + \ldots + (-1)^{n-1}m_{jn}|M_n^i| = 0$$

Si on multiplie une matrice par sa comatrice transposée, on obtient :

$$M.{}^t com(M) = \begin{pmatrix} |M| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |M| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |M| \end{pmatrix}$$

Puisque le déterminant d'un produit est le produit des deux déterminants, on voit que $|M|.|{}^t com(M)| = |M|^n$. Cette équation peut être vue comme une identité polynomiale en n^2 variables, $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$, ce qui signifie qu'on peut diviser chaque côté par un polynôme non nul $|M|$:

$$|{}^t com(M)| = |M|^{n-1}$$

Nous répétons ce que nous venons de faire avec une forme modifiée de la comatrice transposée. On définit une matrice M^* partant de ${}^t com(M)$, où on remplace l'entrée (i, j), $2 \leq k \leq n-1$ par un 0 si $i \neq j$ et par 1 si $i = j$:

$$M^* = \begin{pmatrix} |M_1^1| & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1}|M_1^n| \\ -|M_2^1| & 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+2}|M_2^n| \\ |M_3^1| & 0 & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{n+3}|M_3^n| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n|M_{n-1}^1| & 0 & 0 & \cdots & 1 & -|M_{n-1}^n| \\ (-1)^{n+1}|M_n^1| & 0 & 0 & \cdots & 0 & |M_n^n| \end{pmatrix}$$

En multipliant M par M^*, on obtient

$$M.M^* = \begin{pmatrix} |M| & m_{12} & m_{13} & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & |M| \end{pmatrix}$$

Le déterminant de ce produit est $|M|^2|M_{1n}^{1n}|$, et le déterminant de M^* est $|M_1^1||M_n^n| - |M_n^1||M_1^n|$. On a donc

$$|M|\left(|M_1^1||M_n^n| - |M_n^1||M_1^n|\right) = |M|^2|M_{1n}^{1n}|$$

Encore une fois, on peut voir ceci comme une identité polynomiale en $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ et diviser chaque côté par $|M|$.

Application : Algorithme de condensation de Dodgson

Soit M une matrice $n \times n$, $M = (a_{i,j})$, dont nous cherchons le déterminant. On initialise une paire de matrices (A, B) par $A = M$ et B la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ remplie de 1.

Si aucune entrée de B n'est nulle, on construit A' de taille $(n-1)\times(n-1)$ et B' de taille $(n-2)\times(n-2)$ comme suit :

$$a'_{i,j} = \frac{a_{i,j}a_{i+1,j+1} - a_{i,j+1}a_{i+1,j}}{b_{i,j}}, \quad b'_{i,j} = a_{i+1,j+1}$$

Autrement dit, A' consiste des déterminants des matrices 2×2 extraites de A, divisées par l'élément correspondant de B et B' est la matrice A privée de ses "bords".

On réitère la procédure jusqu'à ce que :

- soit au moins une des entrées de B soit nulle (on est alors bloqué, mais il suffit de revenir en arrière à la matrice originale pour réordonner les lignes ou colonnes)
- soit si A n'a plus qu'une entrée et si B est vide. Dans ce cas, la valeur de A est le déterminant.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B'' = (-1)$$

$$A''' = (-8) \qquad B''' = (\ )$$