Résolution d'une Equation Différentielle Linéaire d'ordre 1

Monier, *Analyse MPSI*, page 345

Exercice :
Résoudre l'équation différentielle :

$$(e): \quad 2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$$

sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ (la fonction inconnue y étant supposée à valeurs réelles).

Nous allons résoudre l'équation normalisée :

$$(E): \quad y' + \frac{1}{2x}\,y = \frac{1}{2x(1+x)}$$

puis étudier les raccords en -1 et 0.

1. **Résolution de** (E)**.**

   Supposons $-1 \notin I$ et $0 \notin I$. La solution générale de (E_0) : $y' + \dfrac{1}{2x}y = 0$ sur I est :

   $$\left| \begin{array}{lcl} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\int \frac{1}{2x}dx} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{|x|}} \end{array} \right. , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

   Aucune solution évidente de (E) ne nous apparaissant, nous allons appliquer la méthode de variation de la constante : cherchons une solution y de (E) de la forme $y = \lambda y_0$ où $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}$ est la nouvelle fonction inconnue, (supposée dérivable sur I), et y_0 : $\left| \begin{array}{lcl} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \end{array} \right.$. On a insi :

   $$(E) \Longleftrightarrow \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) = \frac{1}{2x(1+x)}$$

   On note $\varepsilon = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (ε est constant sur I). On obtient :

   $$\lambda(x) = \int \frac{\sqrt{|x|}}{2x(1+x)}dx = \int \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1+x)}dx$$

   Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{\varepsilon x} \Leftrightarrow x = \varepsilon u^2$:

   $$\lambda(x) = \int \frac{du}{1+\varepsilon u^2}$$

   - Si $\varepsilon = 1$ (c'est-à-dire $I \subset]0, +\infty[$), alors

     $$\lambda(x) = \int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arctan}\, u = \mathrm{Arctan}\sqrt{x}$$

   - Si $\varepsilon = -1$ (c'est-à-dire $I \subset]-\infty, 0[$), alors

     $$\lambda(x) = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right|$$

   On en déduit l'ensemble S_I des solutions de (E) sur I :

   $$\boxed{S_I = \left\{ x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } I \subset]0, +\infty[}$$

   $$\boxed{S_I = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| + \frac{\mu}{\sqrt{-x}} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } I \subset]-\infty, 0[\text{ et } -1 \notin I}$$

2. **Etude des raccords**.

(a) **Raccord en** 0.

Nous supposons ici que $0 \in I$ et $-1 \not I$.

L'application $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$ admet une limite finie en 0^+ si et seulement si $\lambda = 0$ et cette limite est alors 1.

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| + \dfrac{\mu}{\sqrt{-x}}$ admet une limite finie en 0^- si et seulement si $\mu = 0$ et cette limite est alors 1.

Ainsi, il y a raccord par continuité en 0 si et seulement si $\lambda = \mu = 0$.
Considérons donc l'application $y : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et étudions la dérivabilité de y en 0.
On obtient, en utilisant des développements limités :

- Pour $x > 0$,

$$\frac{y(x)-y(0)}{x} = \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{3} + o(1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}$$

- Pour $x < 0$,

$$\frac{y(x)-y(0)}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{-x}}\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) - 2\sqrt{-x}\right) = -\frac{1}{3} + o(1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}$$

Cecci montre que y est dérivable en 0 et que $y'(0) = -\dfrac{1}{3}$.
Enfin, la relation $2x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = 1$ est satisfaite pour $x = 0$, puisque $y(0) = 1$.
Finalement y est la seule solution sur I.

(b) **Raccord en** -1.

Nous supposons ici : $0 \notin I$ et $-1 \not I$.
Si (e) admettait au moins une solution y sur I, en remplaçant x par -1 dans (e), on obtiendrait une contradiction. Donc $S_I = \emptyset$.

(c) **Raccord en** -1 **et** 0.

Nous supposons ici que $0 \in I$ et $-1 \in I$. D'après le point précédent, $S_I = \emptyset$.