Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stabilisant le groupe linéaire

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1*, page 299

Exercice : Soit φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que si M appartient à $GL_n(\mathbb{C})$, alors $\varphi(M)$ appartient à $GL_n(\mathbb{C})$.

1. Donner des exemples de tels endomorphismes.
2. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M appartient à $GL_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\varphi(M)$ appartient à $GL_n(\mathbb{C})$. Pour cela, on prouvera que si $rg(M) < n$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P - \lambda M$ est inversible.
3. Montrer que $rg(\varphi(M)) \geq rg(M)$. Pour cela, on montrera que si $rg(M) = r$, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $Q - \lambda M$ soit non inversible pour r valeurs de λ exactement.
4. Montrer que φ conserve le rang.

1. Si P et Q sont dans $GL_n(\mathbb{C})$, l'endomorphisme $M \mapsto QMP$ convient. La transposition convient également. Par suite tous les endomorphismes du type Q^tMP vérifient la propriété de l'énoncé.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   • Montrons tout d'abord l'indication. Supposons $rg(M) < n$ et M non nulle (si $M = 0$ toute matrice inversible P convient). Géométriquement, on souhaite prouver qu'il existe une droite affine de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dirigée par M et incluse dans le groupe linéaire. En multipliant par P^{-1}, le problème se ramène a démontrer l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, I_n - \lambda P^{-1}M \in GL_n(\mathbb{C})$. Cette condition équivaut à dire que la seule valeur propre de $P^{-1}M$ est 0, c'est-à-dire que $P^{-1}M$ est nilpotente.

   On va encore utiliser les matrices équivalentes. Comme M est de rang $r < n$, elle peut s'écrire $M = AK_rB$ où $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$ et où $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice K_r est nilpotente de sorte que $B^{-1}A^{-1}M = B^{-1}K_rB$, qui lui est semblable, est aussi nilpotente. Ainsi $P = AB$ convient.

   • On suppose toujours $rg(M) < n$ et on va montrer maintenant que $\varphi(M)$ est non inversible. La matrice P étant choisie de manière à remplir la condition ci-dessus, on a $\varphi(P - \lambda M) = \varphi(P) - \lambda\varphi(M) \in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout λ dans $\mathbb{C}$. Comme P est inversible, $\varphi(P)$ l'est aussi et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

   $$I_n - \lambda\varphi(M)\left(\varphi(P)\right)^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$$

   Donc 0 est la seule valeur propre de $\varphi(M)\left(\varphi(P)\right)^{-1}$: celle-ci est nilpotente, donc non inversible. Nécessairement, $\varphi(M)$ est non inversible. On a donc bien l'équivalence demandée.

3. L'inégalité $rg(\varphi(M)) \geq rg(M)$ est vérifiée si M est inversible. Supposons dans la suite $r = rg(M) < n$.

   • On commence par démontrer l'indication en suivant une démarche analogue à celle employée dans la question 2. On écrit cette fois $M = AJ_rB$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$. Soit $D = Diag(1, 2, \ldots, n) \in GL_n(\mathbb{C})$. Posons $Q = ADB$. On a $Q - \lambda M = A(D - \lambda J_r)B$. Elle est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

   • D'après la question précédente, $\varphi(Q_\lambda M) = \varphi(Q) - \lambda\varphi(M)$ est non inversible pour exactement r valeurs (non nulles) de λ. Il en va de même de $I_n - \lambda\varphi(Q)^{-1}\varphi(M)$. On en déduit que la matrice $\varphi(Q)^{-1}\varphi(M)$ a exactement r valeurs propres non nulles distinctes : elle est donc au moins de rang r. On en déduit que $\varphi(M)$ est au moins de rang r puisqu'elle est de même rang que $\varphi(Q)^{-1}\varphi(M)$.

4. Il résulte de la question précédente que φ est injectif ; c'est donc un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $M \in GL_n(\mathbb{C})$, $\varphi^{-1}(M)$ est inversible en vertu de la question 2 puisque $M = \varphi\left(\varphi^{-1}(M)\right)$. L'endomorphisme φ^{-1} vérifie donc la même hypothèse que φ. D'après la question précédente appliquée à φ^{-1}, il vient

   $$rg(M) = rg\varphi^{-1}\left(\varphi - M)\right) \geq rg\varphi(M)$$

   et finalement $rg(M) = rg\varphi(M)$. L'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ conserve donc le rang.