Ensemble des partitions de $n \in \mathbb{N}$

Gourdon, *Analyse*, page 246

Exercice : Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des entiers naturels non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation

$$\alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_p n_p = n$$

Donner un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Idée : interpréter S_n comme le coefficient d'une série entière qui s'exprime simplement en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

Considérons la série entière définie par le produit de Cauchy des séries entières

$$\left(\sum_{n_1 \in \mathbb{N}} z^{\alpha_1 n_1}\right), \dots, \left(\sum_{n_p \in \mathbb{N}} z^{\alpha_p n_p}\right)$$

Toute l'astuce est de remarquer que le coefficient de z^n dans ce produit de Cauchy est le nombre de manières de combiner les puissances de z de chaque terme du produit pour que leur somme fasse n. En d'autres termes, on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n = \left(\sum_{n_1}^{+\infty} z^{\alpha_1 n_1}\right) \ldots \left(\sum_{n_p=0}^{+\infty} z^{\alpha_p n_p}\right) = \frac{1}{1 - z^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{1 - z^{\alpha_p}}$$

et toutes les séries entières correspondantes ont leur rayon de convergence égal à 1. La fonction $F(z)$ est une fraction rationnelle, dont les pôle se trouvent aux racines α_1-ièmes, ..., α_p-ièmes de l'unité. Le pôle $z = 1$ est de multiplicité p, et tous les autres pôles ont une multiplicité $< p$ (en effet, si $\omega^{\alpha_1} = \ldots = \omega^{\alpha_p} = 1$ avec $\omega = e^{2i\alpha\pi}b$ une racine de l'unité et $a \wedge b = 1$, alors b divise $\alpha_1 a, \dots, \alpha_p a$ donc b divise $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ d'après le théorème de Gauss, donc $b = 1$ car les α_i sont premiers entre eux dans leur ensemble). On peut donc écrire la décomposition en éléments simples de F sous la forme

$$F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + G(z), \qquad G(z) = \sum_{\omega \in \Pi} \left(\frac{a_{1,\omega}}{\omega - z} + \ldots + \frac{a_{p-1}, \omega}{(\omega - z)^{p-1}}\right) \qquad (*)$$

où Π désigne un sous-ensemble fini des racines de l'unité et les $a_{k,\omega}$ des constantes complexes. On trouve la constante A par les techniques usuelles, en écrivant

$$(1-z)^p F(z) = \left(\frac{1}{1 + z + \ldots + z^{\alpha_1 - 1}}\right) \cdots \left(\frac{1}{1 + z + \ldots + z^{\alpha_p - 1}}\right)$$

ce qui en faisant $z = 1$ dans cette expression fournit $A = \dfrac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$. Maintenant, comme

$$\frac{1}{(\omega - z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!} \omega^{-n-k} z^n \qquad (**)$$

on en déduit que si $|\omega| = 1$, le coefficient de z^n dans cette série entière est un $O(n^{k-1})$. Ainsi, d'après $(*)$, le coefficient de z^n dans la série entière définissant $G(z)$ est un $O\left(n^{p-2}\right)$. On en déduit, avec $(*)$ et $(**)$ que

$$S_n = \frac{A}{(p-1)!}(n+p-1)(n+p-2)\ldots(n+1) + O\left(n^{p-2}\right) \sim \frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$