Equation de la chaleur

Monier, *Analyse MP*, page 462

Théorème :
La température d'une barre de longueur π, maintenue à ses extrémités à la température 0 est une fonction $u : \Delta = [0,\pi] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue sur Δ, telle que $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur Δ, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in \Delta, & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ \forall t \in [0,+\infty[, & u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ \forall x \in [0,\pi], & u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

où $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f(0) = f(\pi) = 0$, donne la température de la barre à l'instant $t = 0$.

Alors : pour tout $(x,t) \in \Delta$,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \sin(ny) dy$$

Soit u convenant au problème. Soit $t \in [0,+\infty[$. On prolonge $u(\cdot,t)$ à $\mathbb{R}$ en une application $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, telle que :

$$\forall x \in [0,\pi], g_t(x) = u(x,t)$$

Il est clair alors que g_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Puisque g_t est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g_t converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme g_t.

Comme g_t est impaire, les coefficients de Fourier $a_n(t)$ de g_t sont nuls, et, pour tout $n \geq 1$,

$$b_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_t(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x,t) \sin(nx) dx$$

Soit $n \geq 1$. Considérons $U_n : \left| \begin{array}{ccc} \Delta & \to \mathbb{R} & \\ (x,t) & \mapsto & u(x,t)\sin(nx) \end{array} \right.$. On a :

- U_n est continue sur Δ.
- $\dfrac{\partial u_n}{\partial t} : (x,t) \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\sin(nx)$ existe et est continue sur Δ.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intéral, il en résulte que $b_n : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to \mathbb{R} & \\ t & \mapsto & b_n(t) \end{array} \right.$ est continue sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et pour tout $t \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} b_n'(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \sin(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) n \cos(nx) dx \right) \\ &= -\frac{2n}{\pi} \left(\left[u(x,t) \cos(nx) \right]_0^\pi + \int_0^\pi u(x,t) n \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{2n^2}{\pi} \int_0^\pi u(x,t) \sin(nx) dx = -n^2 b_n(t) \end{aligned}$$

Par résolution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants et sans second membre, on obtient

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad b_n(t) = e^{-n^2 t} b_n(0)$$

Et :

$$b_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,0)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx$$

D'où, en notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx,$$

on a bien :

$$\forall (x,t) \in \Delta, \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-nt^2}\sin(nx)$$

Réciproquement, considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $u_n : \left| \begin{array}{ccc} \Delta & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & b_n e^{-n^2 t}\sin(nx) \end{array} \right.$ où :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\sin(ny)dy = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g_0(y)\sin(ny)dy$$

- Comme $\forall n \geq 1, \forall (x,t) \in \Delta,\ |u_n(x,t)| \leq |b_n|$, et que $\sum\limits_{n\geq 1} |b_n|$ converge (puisque g_0 est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$), la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément sur Δ, donc sa somme, notée u est continue sur Δ.

- Soit $a \in]0,+\infty[$. Pour chaque $n \geq 1$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}, \dfrac{\partial u_n}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur Δ, et, pour tout $n \geq 1$ et $(x,t) \in \Delta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial u_n}{\partial t}(x,t)\right| = \left|-n^2 b_n e^{-n^2 t}\sin(nx)\right| \leq n^2|b_n|e^{-n^2 a} \\ \left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,t)\right| = \left|n b_n e^{-n^2 t}\cos(nx)\right| \leq n|b_n|e^{-n^2 a} \\ \left|\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|-n^2 b_n e^{-n^2 t}\sin(nx)\right| \leq n^2|b_n|e^{-n^2 a} \end{array} \right.$$

  Donc les séries d'applications $\sum \dfrac{\partial u_n}{\partial t}$, $\sum \dfrac{\partial u_n}{\partial x}, \sum \dfrac{\partial u_n^2}{\partial x^2}$ sont normalement, donc uniformément convergentes sur Δ.

Il en résulte, d'après un théorème du cours, que $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur Δ, et que, pour tout $(x,t) \in \Delta$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 b_n e^{-n^2 t}\sin(nx) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Enfin,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in]0,+\infty[, & u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ \forall t \in]0,\pi[, & u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) = f(x) \end{array} \right.$$

Finalement, la température du point de la barre, d'abscisse x à l'instant t, est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

où, pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\sin(ny)dy$$