Etude de la fonction Gamma Γ

Précis de mathématiques, *Analyse MP*, page 319

Exercice :

On appelle fonction Gamma la fonction définie par

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

1. Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt$$

4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$.
5. Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
6. Montrer que Γ est convexe et étudier ses variations.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-t}t^{x-1} \end{array}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x,t) \end{array}$.

   Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, f_x est continue, positive sur $]0, +\infty[$ donc $\Gamma(x)$ est définie lorsque f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   En 0, $f_x(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement $x > 0$.

   En $+\infty$, $f_x(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$.

   Finalement, $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x \in]0, +\infty[$.

2. f est continue sur $(\mathbb{R}^{*+})^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   Montrons alors que f satisfait à l'hypothèse de domination pour x décrivant $[a, b]$, $a < b$, intervalle compact quelconque inclus dans $\mathbb{R}^{*+}$.

   Pour $0 < t \leq 1$, $x \mapsto t^{x-1}$ est décroissante donc pour $x \in [a, b]$, on a $0 < f(x,t) \leq t^{a-1}$.

   Pour $t \geq 1$, $x \mapsto t^{x-1}$ est croissante, et alors $x \in [a, b]$ donne $0 < f(x,t) \leq e^{-t}t^{b-1}$.

   Soit alors $\varphi : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1] \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases} \end{array}$

   φ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \quad 0 < f(x,t) \leq \varphi(t)$$

   Ainsi Γ est continue sur $]0, +\infty[$ d'après le théorème de continuité sous le signe somme.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $(\mathbb{R}^{*+})^2$ avec

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}^{*+})^2, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}$$

   Considérons de nouveau un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}^{*+}$ et soit $\psi_k :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \psi_k(t) = |\ln t|^k \varphi(t)$$

   Au voisinage de 0, on a $\psi_k(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ et en $+\infty$, on a encore $\psi_k(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc ψ_k est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par construction, on a

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \psi_k(t)$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec :

$$\mathcal{P}(k) : \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt$$

La classe $\mathcal{C}^1$ de f sur $(\mathbb{R}^{*+})^2$ et l'étude de la définition de Γ assurent les premières hypothèses du théorème de de dérivation sous le signe somme et les fonctions ψ_1 donnent l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^{*+}$. (Il y a une fonction ψ_1 pour chaque segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.)
Ainsi, par application du théorème, Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} dt$$

c'est-à-dire la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Montrons maintenant que si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\Gamma^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
La classe $\mathcal{C}^{k+1}$ de f sur $(\mathbb{R}^{*+})^2$ donne la classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}^{*+})^2$ de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ et $\Gamma^{(k)}$ étant définie pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, les premières hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme sont vérifiées pour la fonction $g = \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$. D'autre part, les fonctions ψ_{k+1} montrent que $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}$ satisfait à l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^{*+}$. On en déduit que $\Gamma^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, c'est-à-dire que Γ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \Gamma^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^{k+1} e^{-t} t^{x-1} dt$$

La propriété $\mathcal{P}(k)$ est donc héréditaire, ce qui achève d'établir que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ s'obtient en intégrant par parties.
   $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ et la formule précédente donne par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

5. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 1$ d'où en posant $u\sqrt{t}$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$
   Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, il vient que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

6. $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x-1} dt$, Γ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc Γ est convexe. Il en résulte que Γ' est strictement croissante et s'annule donc au plus une fois.
   $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ montre avec le théorème de Rolle que Γ' s'annule au moins une fois sur $]1,2[$.
   Finalement Γ' s'annule une fois et une seule en un point $\alpha \in]1,2[$.
   La relation $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ avec la continuité de Γ en 1 donne :

$$\lim_{x \to 0} x\Gamma(x) = \Gamma(1) = 1 \quad \text{donc } \Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

   La croissance de Γ sur $[2,+\infty[\subset [\alpha,+\infty[$ donne pour tout $x \geq 2$,

$$\Gamma(x) \geq \Gamma(E(x)) = (E(x)-1)!$$

   donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$ et d'après la formule de Stirling pour tout $\gamma \in \mathbb{R}^{*+}$, on a

$$x^\gamma \underset{+\infty}{=} o\left(\Gamma(x)\right)$$