Théorème des extremas liés

Gourdon, *Analyse*, pages 311-314-321

Théorème :
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ et $f, g_1, g_2, \ldots, g_p \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On pose

$$A = \{x \in U \ / \ g_1(x) = \ldots = g_p(x) = 0\}$$

Si $f_{|A}$ admet un extremum relatif en $a \in A$ et si les formes linéaires $dg_{1_a}, \ldots, dg_{p_a}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que

$$df_a = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k dg_{k_a}$$

Notons tout d'abord que $p \leq n$. En effet, les p formes linéaires $dg_{1_a}, \ldots, dg_{p_a}$ sont linéairement indépendantes dans le dual de $\mathbb{R}^n$. Mais l'espace dual $(\mathbb{R}^n)^*$ est de dimension n. Ainsi, on obtient bien $p \leq n$.

1er cas : $p = n$.

Le théorème est alors évident. En effet, les n formes linéaires $dg_{1_a}, \ldots, dg_{n_a}$ étant linéairement indépendantes, elles constituent une base de $(\mathbb{R}^n)^*$. Bref, comme $df_a \in (\mathbb{R}^n)^*$, il existe bien des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $df_a = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k dg_{k_a}$.

Remarque : A ce stade, le cas particulier $n = 1$ a été entièrement traité (car alors on a a fortiori $p = n = 1$). On pourra donc supposer à présent $n \geq 2$.

2ème cas : $1 \leq p \leq n - 1$.

Identifions alors $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p$. Ainsi, on notera $a = (a_s, a_p)$. De plus, tout élément de $\mathbb{R}^n$ sera écrit $(x, y) = (x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_p)$.

Les formes linéaires $(dg_{i_a})_{i=1\ldots p}$ étant linéairement indépendantes, elles constituent une famille de rang p dans $(\mathbb{R}^n)^*$. Ainsi, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_s}(a) & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

est de rang p. De A, on peut extraire une matrice de $GL_p(\mathbb{R})$. Quitte à changer le nom des variables, on peut supposer que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_p}(a) \end{pmatrix} \in GL_p(\mathbb{R})$$

En d'autres termes, $\det \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{i,j=1\ldots p} \neq 0$.

Définissons alors $g : \begin{array}{ccc} U & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ z & \mapsto & (g_1(z), \ldots, g_p(z)) \end{array}$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc un voisinage ouvert O de a_s, un voisinage ouvert V de (a_s, a_p) et une application $\psi \in \mathcal{C}^1(O, \mathbb{R}^p)$ tel que pour tout $(x, y) \in V$ avec $x \in O, g(x, y) = 0$ si et seulement si $y = \psi(x)$.

Finalement, il existe un voisinage ouvert W de a inclus dans V et un voisinage ouvert Ω de a_s inclus dans O tels que

$$(1) \qquad A \cap W = \{(x, \psi(x)) \ / \ x \in \Omega\}$$

Par ailleurs, $a_s \in O$ et $(a_s, a_p) \in V$. De plus, $g(a_s, a_p) = 0$. AInsi donc

$$(2) \qquad a_p = \psi(a_s)$$

Définissons alors $h : \begin{array}{ccc} O & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, \psi(x)) \end{array}$. Notons que $h \in \mathcal{C}^1(O, \mathbb{R})$.

La restriction de f à A admettant un extremum local en $a \in A \cap W$, on déduit de (1) et (2) que h admet un extremum local en a_s. Ceci implique alors que pour tout $i = 1 \ldots s$, $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(a_s) = 0$. Bref, par définition de h, il vient que

$$(3) \qquad \forall i = 1 \ldots s, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_i}(a) \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(a) = 0$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \Omega$, $g(x, \psi(x)) = 0$. Ainsi,

$$(4) \qquad \forall k = 1 \dots p, \forall i = 1 \dots s, \qquad \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(a) = 0$$

Introduisons alors la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_p}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+1,n}(\mathbb{R})$$

Les relations (3) et (4) prouvent que les s premières colonnes de B s'expriment linéairement en fonction des p dernières. Bref, le rang de B est inférieur ou égal à p.

Ainsi, les $p+1$ lignes de la matrice B sont liées. Il existe donc des réels non tous nuls $\beta_1, \dots, \beta_{p+1}$ tels que

$$(5) \qquad \beta_1 d{g_1}_a + \dots + \beta_p d{g_p}_a + \beta_{p+1} df_a = 0$$

Comme la famille $(d{g_1}_a, \dots, d{g_p}_a)$ est libre, on a nécessairement $\beta_{p+1} \neq 0$.

Pour tout $i = 1 \dots p$, posons alors $\alpha_i = -\frac{\beta_i}{\beta_{p+1}}$. Dans ce cas, l'égalité (5) conduit exactement à $df_a = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i d{g_i}_a$.

Application : Pour tous réels $x_1, \dots x_n$ positifs, on a l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\boxed{(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}$$

Définissons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_1 \dots x_n \end{array}$.

Soit $s > 0$. Considérons l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_1 + \dots + x_n - s \end{array}$.

Posons alors $K_s = \{x \in (\mathbb{R}^+)^n \ / \ g = 0\}$. De plus, soit U l'ouvert $(\mathbb{R}^+)^n$ et A l'ensemble $\{x \in U \ / \ g(x) = 0\} \subset K_s$.

L'ensemble K_s, fermé borné de $\mathbb{R}^n$, est un espace compact. Par ailleurs, l'application f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et a fortiori sur K_s.

Ainsi, f possède un maximum sur K_s, maximum atteint par exemple en $a \in K_s$. Montrons donc que $a \in A$, afin d'appliquer le théorème des extréma liés.

- Sur $K_s \backslash A$, f est identiquement nulle. De plus, $f(a) \geq f\left(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}\right) > 0$. Le point a est donc nécessairement dans A. Dans ce cas, si $a = (a_1, \dots, a_n)$, pour tout $i = 1 \dots n$, $a_i \neq 0$.

  Ainsi donc, $f_{|A}$ admet un maximum en a.

  Or f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. D'après le théorème précédent, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $df_a = \alpha dg_a$.

  Bref, pour tout $i = 1 \dots n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$. Le calcul des dérivées partielles montre alor que

  $$(6) \qquad \forall i = 1 \dots n, \ \frac{f(a)}{a_i} = \alpha$$

  Mais $f(a) > 0$, ainsi $f(a) \neq 0$ et donc $\alpha \neq 0$. Bref, de (6), on déduit que les $(a_i)_{i=1 \dots n}$ sont tous égaux à la constante $C = \frac{f(a)}{\alpha}$.

  Mais $a \in A$, ce qui donne $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i - s = 0$, soit encore $nC - s = 0$.

  Finalement, sur K_s, f atteint son maximum en $\left(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}\right)$. En d'autres termes,

  $$(7) \qquad \forall x \in K_s, \ f(x) \leq f\left(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}\right) = \left(\frac{s}{n}\right)^n$$

- Soit alors $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$.

  En appliquant l'inégalité (7) à $s = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > 0$ et $x \in K_s$, il vient ainsi $(f(x))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

  La définition de f donne finalement $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

  Cette inégalité restant valable sur $(\mathbb{R}^+)^n$, l'inégalité arithmético-géométrique est finalement démontrée.