Fonction ζ de Riemann

Gourdon, *Analyse*, page 278

Exercice : Pour tout $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

1. Montrer que ζ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives.

2. Montrer que ζ converge en $+\infty$ et que lorsque $s \to 1^+$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

où γ désigne la constante d'Euler.

3. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Montrer alors que

$$\forall s > 1, \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$$

4. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ diverge.

1. Pour démontrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$, il suffit de montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.

   Fixons donc $a > 1$. La fonction ζ est limite simple de la série de fonctions $\sum \frac{1}{n^s}$ sur $]1, +\infty[$. Pour tout $p \geq 1$, montrons que la série des dérivées p-ièmes $\sum (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^s}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on a, en écrivant $a = 1 + 2h$ ($h > 0$)

$$\lim_{n\infty} \frac{\ln^p n}{n^h} = 0 \qquad \text{donc } \frac{\ln^p n}{n^a} = \frac{\ln^p n}{n^h}\frac{1}{n^{1+h}} = o\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right)$$

   donc la série $\sum \frac{\ln^p n}{n^a}$ converge. Comme $\frac{\ln^p n}{n^s} \leq \frac{\ln^p n}{n^a}$ pour tout $s \geq a$, on en déduit que $\sum (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^s}$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Ainsi, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et sur cet intervalle, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{\zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^p n}{n^s}}$$

2. On commence par une classique comparaison série-intégrale,

$$\forall s > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \qquad \text{donc } \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$$

   (par sommation sur $n \geq 1$ de la première inégalité). Ceci entraîne que $\dfrac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \dfrac{1}{s-1}$ pour tout $s > 1$. On en déduit que $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ lorsque $s \to 1^+$, et come $1 \leq \zeta(s) \leq 1 + \dfrac{1}{s-1}$, ζ converge vers 1 vers $+\infty$.

   Pour obtenir le second terme du développement asymptotique de γ en $s = 1^+$, il faut raffiner la technique. Comme $\frac{1}{s-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$, on a

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = f(s) \qquad \text{où } f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}\right)$$

   Or

$$\forall s > 0, \quad \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \qquad \text{donc } 0 \leq \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = \int_n^{n+1} \frac{s dt}{t^{s+1}}$$

On en conclut que la série définissant $f(s)$ converge pour tout $s > 0$. De plus, cela montre que $0 \leq \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq 2\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}$ pour tout $s \in [1,2]$. On en conlut que la série définissant $f(s)$ converge normalement sur $[1,2]$, donc que f est continue sur $[1,2]$, en particulier en 1^+. On en déduit

$$\lim_{s \to 1^+} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = f(1) = \lim_{n\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) = \lim_{n\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) = \gamma$$

3. Pour tout $s > 1$, $\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \sim \frac{1}{p_n^s} \leq \frac{1}{n^s}$ lorsque $n \to +\infty$, donc $\sum_n \ln(1 + \frac{1}{p_n^s})$ converge, ce qui assure l'existence du produit infini pour tout $s > 1$. L'idée dans ce qui suit repose sur le fait que pour tout k et pour tout $s > 1$, $\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{ns}}$.

   Pour tous les entiers naturels non nuls m et M, pour tout $s > 1$, on a

$$\prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) = \sum_{0 \leq i_1, \ldots, i_m \leq M} \frac{1}{(p_1^{i_1} \ldots p_m^{i_m})^s} (*)$$

   Maintenant, donnons-nous $N \in \mathbb{N}^*$. Soit p_{m_0} le plus grand nombre premier p_i et M_0 la plus grande des puissances i_k apparaissant dans toutes les décompositions en facteurs premiers des N premiers entiers $1, \ldots, N$. Considérons $m \geq m_0$ et $M \geq M_0$. Tous les entiers compris entre 1 et N se retrouvent dans les entiers $p_1^{i_1} \ldots p_m^{i_m}$ $(0 \leq i_1, \ldots, i_m \leq M)$, donc le dernier terme de $(*)$ est supérieur à $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$. Par ailleurs, les nombres $p_1^{i_1} \ldots p_m^{i_m}$ représentent des entiers disctincts (unicité de la décomposition en facteurs premiers), et finalement, $(*)$ montre

$$\forall s > 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

   Cette expression est valable pour tout $m \geq m_0$ et pour tout $M \geq M_0$. En faisant tendre M puis m vers $+\infty$, on en déduit

$$\forall s > 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i_1=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right) \leq \zeta(s)$$

   Cette expression est valable indépendamment de $N \in \mathbb{N}^*$, on peut donc faire tendre N vers $+\infty$, ce qui fournir l'égalité voulue.

4. Raisonnons par l'absurde. Si $\sum \frac{1}{p_n}$ converge, l'équivalent $\ln\left(\frac{1}{1 - p_n^{-1}}\right) \sim \frac{1}{p_n}$ montre que $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ converge. Notons l la valeur de ce produit infini. Pour tout $s > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-s}} \right) \leq \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \right) = l$$

   ce qui montre que ζ est majorée sur $]1, +\infty[$. Ceci est impossible puisque l'on a montré que $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ lorsque $s \to 1^+$, d'où le résultat.