Fonctions nulle part dérivables

Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*, page 271

Proposition :
L'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.

L'idée de la démonstration est de montrer que $\mathcal{A}$ contient une intersection dénombrable d'ouverts denses. Comme $\mathcal{C}([0,1]$ est complet, c'est un espace de Baire, donc $\mathcal{A}$ sera bien dense.

Soit $\mathcal{B} = {}^c\mathcal{A}$: l'ensemble des fonctions continues dérivables en au moins un point de $[0,1]$.
Si f est une fonction dérivable en x_0, la quantité $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est bornée lorsque $h \to 0$.
On pose donc :

$$\forall n \geq 1, \quad F_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \ / \ \exists x \in [0,1], \ \forall y \in [0,1], \left|f(y)-f(x)\right| \leq n|x-y| \right\}$$

On a alors que $\mathcal{B} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} F_n$. Montrons que F_n est fermé et que $\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$.

1. **F_n est fermé.**
   Soit $(f_k)_k$ une suite de F_n qui converge vers f dans $\mathcal{C}([0,1])$.
   A chaque f_k correspond un certain $x_k \in [0,1]$ tel que

$$\forall y \in [0,1], \ |f_k(y) - f_k(x_k)| \leq n|y - x_k|$$

   De la suite (x_k), on peut extraire une sous-suite, encore notée $(x_k)_k$, convergeant vers $x_0 \in [0,1]$.
   Montrons donc que $\lim\limits_{k \to +\infty} (f_k(y) - f_k(x_k)) = f(y) - f(x_0)$.

$$\begin{aligned} \left|f_k(y) - f_k(x_k) - f(y) + f(x_0)\right| &\leq \left|f_k(y) - f(y)\right| + \left|f(x_0) - f(x_k)\right| + \left|f(x_k) - f_k(x_k)\right| \\ &\leq 2\left\|f - f_k\right\|_\infty + \left|f(x_0) - f(x_k)\right| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

   On a donc

$$|f(y) - f(x_0)| \leq n\,|x_0 - y|$$

   Donc la limite f était bien dans F_n : F_n est bien fermé.

2. **$\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$.**
   Soit $f \in F_n$. Montrons que, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{B}(f, \varepsilon) \cap {}^cF_n \neq \emptyset$.
   Autrement dit, on va montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que :

$$\begin{cases} \|f - g\|_\infty < \varepsilon \\ \forall x \in [0,1], \ \exists y \in [0,1] \ / \ |g(y) - g(x)| > n|y - x| \end{cases}$$

   Soit $f \in F_n$ et $\varepsilon > 0$ fixé.
   Les polynômes étant denses dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\|P - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

   On note $M = \sup\limits_{x \in [0,1]} |P'(x)|$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon N \geq 2(M + n + 1)$.

   On a : $[0,1] = \bigcup\limits_{k=0}^{N-1} \left[\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}\right]$ et on considère la fonction g_0, $\dfrac{1}{N}$-périodique, définie sur $\left[0, \frac{1}{N}\right]$ par :

$$g_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon N}{2}\, x, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2N} \\ \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon N}{2}\, x, & \text{si } \dfrac{1}{2N} \leq x \leq \dfrac{1}{N} \end{cases}$$

La fonction g_0 est continue sur $[0,1]$, dérivable sauf en un nombre fini de points, et si g_0 est dérivable en x, on a :

$$|g_0'(x)| = \frac{\varepsilon N}{2} \geq M + n + 1$$

De plus, $\sup\limits_{x \in [0,1]} |g_0(x)| = \dfrac{\varepsilon}{4}$.

On pose $g = P + g_0$. Alors $\|f - g\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty + \|g_0\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$.

De plus, pour tous $x, y \in [0,1]$,

$$|g(y) - g(x)| \geq |g_0(y) - g_0(x)| - |P(y) - P(x)|$$

Or, pour tout $x \in [0,1]$, il existe un certain $y \in [0,1]$ tel que

$$\begin{cases} |g_0(y) - g_0(x)| > (M + n + 1)|x - y| \\ |P(y) - P(x)| \geq M|x - y| \end{cases}$$

Autrement dit,

$$|g(y) - g(x)| > (n+1)|x - y|$$

Donc $g \in \mathcal{C}([0,1]$ et $g \in \mathcal{B}(f, \varepsilon) \cap {}^cF_n$. Donc $\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$.

En conclusion, $\mathcal{B} \subset \bigcup\limits_{n \geq 1} F_n$. Donc $\mathcal{A} \supset \bigcap\limits_{n \geq 1} {}^cF_n$ avec $\overline{{}^cF_n} = \mathcal{C}([0,1]$. Le théorème de Baire nous donne donc que

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}([0,1])$$