Fonctions à variation bornée

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, page 276

Exercice : Soit une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. À toute subdivision $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \ldots <_n = b)$ de $[a, b]$, on associe la *variation totale* de f sur σ :

$$V(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1} - f(x_k)|$$

On pose

$$V_a^b(f) = \sup_\sigma V(f, \sigma) \quad \in [0, +\infty]$$

que l'on appelle la *variation* de f sur $[a, b]$. Si $V_a^b(f)$ est fini, on dit que f est à *variation bornée* sur $[a, b]$.

1. Montrer que si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, f est à variation bornée sur $[a, b]$, et calculer sa variation. Examiner le cas où f est lipschitzienne ou monotone.
2. Comparer $V_a^b(f + g)$ à $V_a^b(f) + V_a^b(g)$.
3. Pour $c \in]a, b[$, comparer la variation de f sur $[a, b]$ à la somme de ses variations sur $[a, c]$ et $[c, b]$.
4. Montrer que f est à variation bornée sur $[a, b]$ si et seulement si f est somme de deux fonctions monotones sur $[a, b]$.

1. Pour toute subdivision $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ de $[a, b]$ et $k \in \{0, \ldots n-1\}$, on a

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)dt \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)|dt$$

et donc $V(f, \sigma) \leq \displaystyle\int_a^b |f'(t)|dt$. La fonction f est donc à variation bornée sur $[a, b]$ et $V_a^b(f) \leq \displaystyle\int_a^b |f'(t)|dt$.

Montrons qu'en fait $V_a^b(f)$ est égal à $\displaystyle\int_a^b |f'(t)|dt$. Si σ est une subdivision de $[a, b]$ alors, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, il existe, d'après la formule des accroissements finis, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tel que $f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1} - x_k)f(\xi_k)$. On obtient $V(f, \sigma) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\,|f'(\xi_k)|$. On recconaît une somme de Riemann. Lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, $V(f, \sigma)$ tend vers $\displaystyle\int_a^b |f'(t)|dt$, puisque $|f'|$ est continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $V(f, \sigma) \geq \displaystyle\int_a^b |f'(t)|dt - \varepsilon$. On peut conclure que $V_a^b(f) = \displaystyle\int_a^b |f'(t)|dt$.

Si f est α-lipschitzienne, on a, avec les notations précédentes, pour toute subdivision σ de $[a, b]$, $V(f, \sigma) \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha(x_{k+1} - x_k) = \alpha(b - a)$. Ainsi f est à variation bornée sur $[a, b]$ et $V_a^b(f) \leq \alpha(b - a)$. Ainsi f est à variation bornée sur $[a, b]$ et $V_a^b(f) \leq \alpha(b - a)$.

Si f est croissante sur $[a, b]$, on obtient, pour toute subdivision σ de $[a, b]$, $V(f, \sigma) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a)$. Ainsi f est à variation bornée sur $[a, b]$ et $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$. On démontre, de même qu'une fonction décroissante est à variation bornée et que $V_a^b(f) = f(a) - f(b)$.

2. Montrons que si f et g sont deux fonctions définies sur $[a,b]$, on a $V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$. L'inégalité est évidente si $V_a^b(f)$ ou $V_a^b(g)$ est infini. Supposons donc f et g à variation bornée. Alors, pour toute subdivision σ de $[a,b]$,

$$\begin{aligned}
V(f+g,\sigma) &= \sum_{k=0}^{n-1} |(f+g)(x_{k+1}) - (f+g)(x_k)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \\
&\leq V(f,\sigma) + V(g,\sigma) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)
\end{aligned}$$

On en déduit que $f+g$ est à variation bornée et que $V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$.

3. Soit σ une subdivision de $[a,b]$, $\sigma' = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en rajoutant à σ le point c s'il n'y est pas. Notons p l'enier tel que $x_p = c; \sigma_1 = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ est une subdivision de $[a,c]$ et $\sigma_2 = (x_p < \ldots < x_n = b)$ une subdivision de $[c,b]$. On a $V(f,\sigma) \leq V(f,\sigma')$: on rajoute au plus un point dans la subdivision et l'inégalité résulte de l'inégalité triangulaire. D'autre part, $V(f,\sigma') = V(f,\sigma_1) + V(f,\sigma_2)$. On en déduit

$$V(f,\sigma) \leq V(f,\sigma_1) + V(f,\sigma_2) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

On a donc $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$. Montrons qu'il y a égalité. Supposons que f est à variation bornée sur $[a,c]$ et sur $[b,c]$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver des subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement telle que : $V(f,\sigma_1) \geq V_a^c(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $V(f,\sigma_2) \geq V_c^b(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Considérons la subdivision σ de $[a,b]$ obtenue en faisant la réunion de σ_1 et σ_2. On a alors $V(f,\sigma) = V(f,\sigma_1) + V(f,\sigma_2) \geq V_a^c(f) + V_c^b(f) - \varepsilon$. On obtient finalement $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

Si $V_a^c(f)$ ou $V_c^b(f)$ est infini, alors $V_a^b(f)$ est infini, car si σ_1 est une subdivision quelconque de $[a,c]$, σ_2 une subdivision quelconque de $[b,c]$ et σ la réunion des deux, alors $V(f,\sigma) = V(f,\sigma_1) + V(f,\sigma_2)$, quantité qui n'est pas bornée.

4. D'après ce qui précède, une fonction monotone est à variation bornée et la somme de deux fonctions à variation bornée est une fonction à variation bornée : la somme de deux fonctions monotones est donc une fonction à variation bornée.

Réciproquement, supposons que f est à variation bornée sur $[a,b]$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, f est à variation bornée sur $[a,x]$. Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(x) = V_a^x(f)$. Si $a \leq x \leq x' \leq b$, alors $g(x') = g(x) + V_x^{x'}(f) \geq g(x)$; g est donc croissante. D'autre part, avec les mêmes notations, $V_x^{x'}(f) \geq |f(x') - f(x)|$ (on prend la subdivision $\sigma = (x < x')$). On en déduit $g(x') \geq g(x) + f(x') - f(x)$, c'est-à-dire $f(x') - g(x') \leq f(x) - g(x)$. La fonction $h = f - g$ est décroissante. La fonction $f = g + h$ est somme d'une fonctionc croissante et d'une fonction décroissante.