Formule de Stirling

Gourdon, *Analyse*, page 211

Exercice : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$$

Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que

$$n! \underset{n\infty}{\sim} k\sqrt{n}n^n e^{-n}$$

Calculer la constante k en utilisant la formule de Wallis.

Estimons v_n lorsque $n \to +\infty$.

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right] \\ &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Cette expression montre que $\sum v_n$ converge.

Comme on a $v_0 + \ldots + v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_0$ pour tout n , la suite $(\ln u_n)$ converge. En notant λ sa limite, on voit que (u_n) converge vers $k = e^\lambda > 0$ d'où l'équivalent cherché.

Il nous reste à calculer la constante k. Comme indiqué dans l'énoncé, on utilise la formule de Wallis qui est

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\ldots 2}{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}\right]^2 = \pi$$

Par ailleurs en utilisant l'équivalent de $n!$, on a lorsque $p \to +\infty$

$$\frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\ldots 2}{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}\right]^2 = \frac{1}{p}\left[\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right]^2 \sim \frac{2^{4p}}{p}\frac{k^4 p^{4p+2}e^{-4p}}{k^2(2p)^{4p+1}e^{-4p}} = \frac{k^2}{2}$$

donc on a $\pi = \dfrac{k^2}{2}$ d'après la formule de Wallis, d'où $k = \sqrt{2\pi}$. Finalement, le résultat obtenu est

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}$$

Rappel : **Formule de Wallis**.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

Par une intégration par parties, on obtient que $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. D'où

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}{2p(2p-2)\ldots 2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{2p(2p-2)\ldots 2}{(2p+1)(2p-1)\ldots 1}$$

Puis, en remarquant que $I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, on tire que

$$\lim_{p\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$$

ce qui donne la Formule de Wallis.