Formules de Frenet

Monier, *Géométrie Tome 7*, pages 254-259 et 469

Théorème :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} & = & \dfrac{\overrightarrow{N}}{R} \\[2ex] \dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} & = & -\dfrac{\overrightarrow{T}}{R} + \dfrac{\overrightarrow{B}}{T} \\[2ex] \dfrac{d\overrightarrow{B}}{ds} & = & -\dfrac{\overrightarrow{N}}{T} \end{array}\right.$$

Rappelons les définitions. Soit Γ une courbe, paramétrée par l'abscisse curviligne s, s parcourant un intervalle I.

On note $\overrightarrow{T}$ le vecteur tangent unitaire en $M(s)$ à la courbe Γ, défini par : $\boxed{\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}}$

On appelle rayon de courbure de Γ en $M(s)$ le réel R défini par : $\boxed{\dfrac{1}{R} = \left\|\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}\right\|}$

On appelle vecteur normal principal à Γ en $M(s)$ le vecteur défini par : $\boxed{\overrightarrow{N} = R\,\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}}$

On appelle vecteur binormal à Γ en $M(s)$ le vecteur défini par : $\boxed{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N}}$

On appelle rayon de torsion de Γ en $M(s)$ le réel T défini par : $\boxed{\dfrac{1}{T} = \overrightarrow{B} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds}}$

Puisque Γ est paramétré par l'abscisse curviligne, on a $\forall s \in I, \|\overrightarrow{T}\|^2 = 1$. On obtient donc en dérivant :

$$\forall s \in I, \overrightarrow{T} \cdot \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = 0, \qquad \text{autrement dit,} \quad \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{N} = 0$$

En dérivant cette nouvelle expression, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \cdot \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = 0$$

Comme on a par définition $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{R}$, on en déduit que

$$\overrightarrow{T} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\frac{1}{R}$$

D'autre part, $\|\overrightarrow{N}\|^2 = 1$, on a donc également $\overrightarrow{N} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = 0$.

Puisque $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ est une base orthonormée, on a alors :

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \left(\overrightarrow{T} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}\right)\overrightarrow{T} + \left(\overrightarrow{N} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}\right)\overrightarrow{N} + \left(\overrightarrow{B} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}\right)\overrightarrow{B} = \boxed{-\frac{1}{R}\overrightarrow{T} + \frac{1}{T}\overrightarrow{B}}$$

Enfin, par dérivation du produit vectoriel, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \wedge \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} \wedge \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \frac{1}{T}\,\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{B} = \boxed{-\frac{1}{T}\overrightarrow{N}}$$

Application :
Soit Γ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^\infty$, s l'abscisse curviligne, R le rayon de courbure et T le rayon de torsion.
Alors :

1. Γ est tracé sur une sphère si et seulement si : $T\dfrac{d^2R}{ds^2}+\dfrac{dR}{ds}\dfrac{dT}{ds}+\dfrac{R}{T}=0$

2. De plus si $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et si Γ est tracé sur une sphère de rayon a, alors :

$$R^2+T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2=a^2$$

On paramètre Γ par l'abscisse curviligne s, s parcourant un intervalle I.

1. Pour qu'il existe une sphère sur laquelle Γ soit tracée, il faut et il suffit qu'il existe $\Omega \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall s \in I,\ \overrightarrow{\Omega M}(s)\cdot\frac{\overrightarrow{dM}}{ds}=0$$

Ceci revient à l'existence de deux applications $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que :

$$\exists \Omega \in \mathbb{R}^3, \forall s \in I, \quad \overrightarrow{\Omega M}=u(s)\overrightarrow{N}(s)+v(s)\overrightarrow{B}(s)$$

ou encore, en dérivant :

$$\overrightarrow{T}=u'\overrightarrow{N}+u\left(-\frac{\overrightarrow{T}}{R}+\frac{\overrightarrow{B}}{T}\right)+v'\overrightarrow{B}+v\left(-\frac{\overrightarrow{N}}{T}\right)$$

En identifiant les coefficients dans la base orthonormée $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$, on a alors :

$$1=-\frac{u}{R},\quad u'-\frac{v}{T}=0,\quad \frac{u}{T}+v'=0$$

En éliminant u et v, on obtient la relation demandée, et de plus :

$$u=-R \qquad \text{et} \qquad v=T\frac{dR}{ds}$$

2. Avec les notations précédentes, on a trouvé que

$$\overrightarrow{OM}=-R\overrightarrow{N}+T\frac{dR}{ds}\overrightarrow{B}$$

D'où :

$$\|a\|^2=\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2=R^2+T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2$$