Formules de Newton

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1*, page 193

Théorème : Soit n un entier ≥ 2, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $x_1, \ldots x_n$ n éléments de $\mathbb{K}$. On considère, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme $S_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$. On note $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \ldots, x_n$, définies par

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$$

On a alors les relations suivantes :

1.

$$S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} S_{p-n} + (-1)^n \sigma_n S_{p-n} = 0 \quad \text{pour } p \geq n$$

2.

$$S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} S_1 + (-1)^p p \sigma_p = 0 \quad \text{pour } 1 \leq p \leq n-1$$

1. Considérons le polynôme $P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i) \in \mathbb{K}[X]$. Il a pour expression

$$P = X^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sigma_i X^{n-1}$$

Pour $1 \leq i \leq n$ et $p \geq n$, on a, puisque $P(x_i) = 0$, $x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \ldots + (-1)^p \sigma_p = 0$ et donc en multipliant par x_i^{p-n},

$$x_i^p - \sigma_1 x_i^{p-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n x_i^{p-n} = 0$$

En additionnant, pour $1 \leq i \leq n$, on obtient

$$\boxed{S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n S_{p-n} = 0}$$

2. Soit p entier tel que $1 \leq p \leq n-1$. Ce second cas est nettement plus difficile. Pour commencer, on compare S_p et $\sigma_1 S_{p-1}$. On obtient

$$S_p = \sigma_1 S_{p-1} - \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2 \leq n \\ i_1 \neq i_2}} x_{i_1} x_{i_2}^{p-1}$$

On compare ensuite cette dernière somme et $\sigma_2 S_{p-2}$. On a, cette fois,

$$\sigma_2 S_{p-2} = \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2 \leq n \\ i_1 \neq i_2}} x_{i_1} x_{i_2}^{p-1} + \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 \leq n \\ i_3 \neq i_1, i_2}} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}^{p-2}$$

Plus généralement, on pose, pour $0 \leq k \leq p-1$,

$$A_k = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq n \\ i_{k+1} \neq i_1, i_2, \ldots, i_k}} x_{i_1} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}}^{p-k}$$

On remarque qu'en particulier $A_0 = S_p$ et $A_{p-1} = p\sigma_p$. On obtient alors, pour $1 \leq k \leq p-1$,

$$\sigma_k S_{p-k} = A_{k-1} + A_k$$

En multipliant la première relation par -1, la seconde par $(-1)^2$, ..., la $(p-1)$-ième par $(-1)^{p-1}$, on trouve

$$\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \sigma_k S_{p-k} = -A_0 + (-1)^{p-1} A_{p-1} = -S_p + (-1)^{p-1} p \sigma_p$$

ce qui, si on fait tout passer dans le membre de gauche de l'égalité, nous donne le résultat voulu.