Générateurs du Groupe Linéaire

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 2*, page 165

Théorème : Soit $n \geq 2$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

1. On appelle *matrice de transvection* toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

   On appelle *matrice de dilatation* toute matrice diagonale $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

   Alors l'ensemble des matrices de transvection engendre le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ et que l'ensemble des matrices de transvection et de dilatation engendre le groupe $GL_n(\mathbb{K})$.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $GL_n(\mathbb{R})$ est engendré par l'ensemble des matrices inversibles diagonalisables.

3. **Application :** $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

1. Notons que les matrices de transvection sont toutes de déterminant 1. Le groupe qu'elles engendrent est donc inclus dans $SL_n(\mathbb{K})$. La multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$). Notons qu'il est possible de réaliser l'échange de deux lignes (ou de deux colonnes) uniquement à l'aide de transvections modulo un changement de signe : en effet, la matrice $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ a pour effet (par multiplication à gauche) de remplacer L_i par L_j et L_j par $-L_i$, les autres lignes étant invariantes. Il n'est évidemment pas possible de réaliser l'échange de deux lignes sans apparition de ce signe moins puisque cette opération change le signe du déterminant.

   Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, nous allons transformer A en une matrice de dilatation mais en utilisant uniquement des transvections. Comme A est inversible, sa première colonne n'est pas nulle. Si $a_{i1} \neq 0$ avec $i \geq 2$, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{a_{11} - 1}{a_{i1}} L_i$, permet de mettre un coefficient 1 en position $(1, \leftarrow 1)$. Si tous les coefficients $a_{i,1}$ pour $i \geq 2$ sont nuls, on effectue l'échange des lignes $L_1 \leftarrow L_2$ et $L_2 \leftarrow -L_1$ pour se ramener au cas précédent. En utilisant le coefficient $(1,1)$ comme pivot, une succession d'opérations sur les lignes puis sur les colonnes permet d'annuler tous les autres coefficients de la première ligne et de la première colonne. Autrement dit, il existe des matrices de transvections $M_1, \ldots, M_p$ et $N_1, \ldots, N_q$ telles que

   $$M_p \ldots M_1 A N_1 \ldots N_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

   où $A_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$.

   On recommence le même algorithme sur la matrice A_1 et ainsi de suite. On aboutit à la fin de cet algorithme à une matrice diagonale $diag(1, 1, \ldots, 1, \alpha)$, où le scalaire α n'est autre que $\det A$. On vient donc de montrer que pour toute matrice inversible A, il existe des matrices de transvection $U_1, \ldots, U_r$ et $V_1, \ldots, V_s$ telles que

   $$A = U_r \ldots A_1 D_n(\det A) V_1 \ldots V_n$$

   Cela permet de répondre à la question : toute matrice $A \in SL_n(\mathbb{K})$ s'écrit comme un produit de matrices de transvection et toute matrice de $GL_n(\mathbb{K})$ est produit de matrices de transvection et de dilatation.

2. Comme on sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de dilatation et les matrices de transvection, montrons que ces deux types de matrices sont engendrés par des matrices inversibles diagonalisables. Les premières sont des matrices diagonales. Montrons donc que toute matrice de transvection peut s'écrire comme un produit de matrices diagonalisables.

   Si $M = I_n + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ est une telle matrice, il suffit d'écrire $M = D^{-1}(DM)$ où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont non nuls et deux à deux distincts (par exemple $1, 2, \ldots, n$). La matrice D^{-1} est diagonale et la matrice DM est triangulaire avec la même diagonale que D : elle est donc diagonalisable.

   L'ensemble des matricides diagonalisables inversibles engendre donc tout le groupe $GL_n(\mathbb{R})$.

3. Montrons que toute matrice $A \in SL_n(\mathbb{K})$ est reliée par un arc continu à l'identité I_n. D'après le premier point, il existe une partie X contenue dans l'ensemble des couples $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ avec $i \neq j$ et une famille $(\lambda_C)_{C\in X}$ de $\mathbb{K}$ telles que A soit le produit des transvections $T_C(\lambda_C)$:

$$A = \prod_{C\in X} T_C(\lambda_C)$$

oN pose $\varphi : t \in [0,1] \mapsto A_t = \prod_{C\in X} T_C(t\lambda_C)$. On obtient alors un arc continu qui relit $\varphi(0) = I_n$ à $\varphi(1) = A$ et $SL_n(\mathbb{K}$ est donc connexe par arcs.