Groupe des homothéties-translations

Monier, *Géométrie MPSI*, page 75
Ladegaillerie, *Géométrie pour le CAPES de Mathématiques*, page 78
Combes, *Algèbre et géométrie*, page 120

Théorème : Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.

1. Les homothéties et translations d'un espace affine E forment un groupe $\mathcal{D}(E)$ pour la loi de composition. La composée de deux translations ou homothéties est donc une translation ou une homothétie, selon que sa partie linéaire ou non l'identité.

   Plus précisément,

   (a) Le produit $h_{I,k} \circ h_{j,k'}$ de deux homothéties est :
   - si $kk' = 1$, une translation $t_{\overrightarrow{w}}$ de vecteur $\overrightarrow{w}$ parallèle à (IJ).
   - si $kk' \neq 1$, une homothétie $h_{K,kk'}$ avec $K \in (IJ)$.

   (b) Le produit $t_{\overrightarrow{u}} \circ h_{I,k}$ (resp. $h_{I,k} \circ t_{\overrightarrow{u}}$) d'une homothétie et d'une translation est une homothétie $h_{K,k}$ avec (IK) parallèle à $\overrightarrow{u}$.

2. La commutativité (ou non) des éléments de $D(E)$ s'en déduit :

   (a) Deux translations commutent

   (b) Une translation et une homothétie ne commutent pas

   (c) Deux homothéties commutent si et seulement si elles sont de même centre

3. Pour tout point $A \in E$, le groupe $H_A(E)$ des homothéties de centre A est un sous-groupe de $D(E)$ et les sous-groupes $(H_B(E))_{B \in E}$ sont les conjugués de $H_A(E)$.

1. $\mathcal{D}(E)$ est stable par produit et passage à l'inverse car ses éléments sont caractérisés par le fait que leur partie linéaire est une homothétie vectorielle et le produit ou l'inverse d'homothéties vectorielles en est encore une. C'est donc un groupe. Etudions dans le détail :

   (a) **Produit d'une homothétie et d'une translation**

   Soient $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, $(\Omega, k) \in E \times \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$. On pose

   $$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ h_{\Omega,k}$$

   Cherchons un éventuel point fixe A pour f. On a :

   $$f(A) = A \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{u} + k\,\overrightarrow{\Omega A} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{u}$$

   Considérons donc le point A de E défini par $\overrightarrow{\Omega A} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{u}$. On a, pour tout $M \in E$,

   $$\overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = k\,\overrightarrow{AM}$$

   donc f est l'homothétie de centre A et de rapport k.

   (b) **Produit d'une translation et d'une homothétie**

   Soient $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, $(\Omega, k) \in E \times \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$. Comme :

   $$h_{\Omega,k} \circ t_{\overrightarrow{u}} = \left(t_{\overrightarrow{u}} \circ h_{\Omega,1/k}\right)^{-1}$$

   d'après le point précédent, la composée est donc une homothétie de centre A défini par $\overrightarrow{\Omega A} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{u}$, et de rapport $1/k$.

(c) **Produit de deux homothéties**
Soient $\Omega, \Omega' \in E$, $k, k' \in \mathbb{K}^*$. On pose

$$g = h_{\Omega',k'} \circ h_{\Omega,k}$$

Cherchons un éventuel point fixe A de g. On a :

$$\begin{aligned} g(A) = A & \iff \exists A_1 \in E \ / \left\{ \begin{array}{l} A_1 = h_{\Omega,k}(A) \\ A = h_{\Omega',k'}(A_1) \end{array} \right. \\ & \iff \exists A_1 \in E \ / \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega A_1} = k\overrightarrow{\Omega A} \\ \overrightarrow{\Omega' A} = k'\overrightarrow{\Omega' A_1} \end{array} \right. \\ & \iff \overrightarrow{\Omega' A} = k'\left(\overrightarrow{\Omega'\Omega} + k\overrightarrow{\Omega A}\right) \\ & \iff (1-kk')\overrightarrow{\Omega A} = (1-k')\overrightarrow{\Omega\Omega'} \end{aligned}$$

- Si $kk' \neq 1$, alors g admet un unique point fixe A, défini par $\overrightarrow{\Omega A} = \dfrac{1-k'}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, et on a, pour tout $M \in E$,
$$\overrightarrow{Ag(M)} = \overrightarrow{g(A)g(M)} = \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{AM}\right) = k'k\overrightarrow{AM}$$
donc g est l'homothétie de centre A et de rapport $k'k$.
- Si $kk' = 1$, $\overrightarrow{g} = Id_{\overrightarrow{E}}$, donc g est une translation. De plus :
$$\overrightarrow{\Omega g(\Omega)} = (1-k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}$$
donc g est la translation de vecteur $(1-k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}$

2. **Commutativité.**
   - Le produit de translations est bien commutatif.
   - Il résulte des cas précédents que le produit d'une homothétie et d'une translation (distinctes de Id) n'est pas commutatif.
   - Il est clair que le produit d'homothéties de même centre est commutatif. En fait, c'est le seul cas où il commute.
   Si $h_{\Omega',k'} \circ h_{\Omega,k} = h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega',k'}$ avec $k, k' \notin \{0, 1\}$, on a par exemple :
   $$h_{\Omega',k'}(\Omega) = h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega',k'}(\Omega)$$
   Autrement dit, on voit que $h_{\Omega',k'}(\Omega)$ est un point fixe de $h_{\Omega,k}$: on a donc $h_{\Omega',k'}(\Omega) = \Omega$. Ainsi Ω est un point fixe de $h_{\Omega',k}$: on a $\Omega = \Omega'$.

3. **Conjugaison des $H_A(E)$, $A \in E$**

   Soit $A \in E$. L'ensemble des homothéties $h_{A,k} : M \mapsto A + k\overrightarrow{AM}$ de centre A est le stabilisateur $H_A(E)$ du point A pour l'action du groupe $D(E)$ sur E.

   L'action de $D(E)$ est transitive sur E car les translations (qui sont dans $D(E)$) agissent transitivement sur E. Les stabilisateurs $H_A(E)$ et $H_B(E)$ de deux points $A, B \in E$ sont donc conjugués. Par exemple, si $t = t_{\overrightarrow{u}}$ et $h = h_{A,k}$, on a :
   $$t \circ h_{A,k} \circ t^{-1} = h_{t(A),k}$$
   (faire une figure)