Groupe des isométries du cube

Combes, *Algèbre et géométrie*, page 175

Exercice : Soit $\Gamma = ABCDA'B'C'D'$ un cube de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$ ($ABCD$ est une face et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$). Considérons

$$G = \{f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_3) \ / \ f(\Gamma) = \Gamma\}$$

1. Montrer que G est un sous-groupe du groupe Iso des isométries de $\mathcal{E}_3$. Etudier l'orbite du sommet A, son stabilisateur G_A. Préciser l'ordre de G.
2. Soit H un sous-groupe d'ordre 3 de G. Montrer que H est contenu dans le stabilisateur d'un sommet. Combien de sous-groupes d'ordre 3 existe-t-il dans G ? Est-ce conforme aux théorèmes de Sylow ?
3. Montrer que tout $f \in G$ définit une permutation σ_f des quatre grandes diagonales $[AC'], [BD'], [CA'], [DB']$. Montrer que $\varphi : f \mapsto \sigma_f$ est un homomorphisme surjectif de G sur le groupe $\mathcal{S}_4$ des permutations des diagonales. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est le centre de G.
4. Montrer que $G^+ = G \cap Iso^+(\mathcal{E}_3)$ est un sous-groupe distingué de G isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.

1. On sait que tout $f \in G$ est un automorphisme affine de $\mathcal{E}_3$. Il laisse invariant l'ensemble des sommets de Γ sur lesquels il induit une permutation s_f et $f \mapsto s_f$ est un homomorphisme injectif de G dans $\mathcal{S}_8$. Prenons la longueur du côté comme unité de longueur. Alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ est un repère orthonormé. Par l'isomorphisme affine f, l'image du plan $\mathcal{P}$ d'une face comme $ABCD$ est un plan qui contient les somets images. Comme Γ est contenu dans l'un des demi-espaces délimité par $\mathcal{P}$, de même $f(\Gamma) = \Gamma$ est contenu dans l'un des demi-espaces délimités par l'image de $\mathcal{P}$. Ainsi, l'image d'une face de Γ est une autre face de Γ. On en déduit que f applique le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ sur un repère analogue, d'origine $f(A)$, c'est-à-dire sur un repère orthonormé. Donc f est une isométrie de $\mathcal{E}_3$.

   Soit $f \in G_A$. D'après ce qui précède, l'image du repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ est un autre repère issu du sommet A dont les vecteurs sont une permutation de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$. Réciproquemet, pour tout repère $\mathcal{R}'$ de ce type, il existe une isométrie f de $\mathcal{E}_3$ unique telle que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$. Comme f est affine, elle conserve le parallélisme, et applique le cube Γ sur lui-même. Ainsi G_A est d'ordre $3! = 6$. On connaît 6 éléments de G_A (et donc tous les éléments de G_A), à savoir Id, les symétries planes orthogonales par rapport aux 3 plans analogues au plan $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC})$, les composées de deux telles symétries qui sont deux rotations r, r^2 d'axe (AC') et d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. Comme tout $f \in G$ laisse fixe l'isobarycentre O de l'ensemble des sommets, s'il laisse fixe un sommet, il laisse fixe le sommet symétrique par rapport à O et tout point de la droite qui les joint (grande diagonale du cube). Les stabilisateurs de deux sommets opposés sont donc égaux.

   L'action de G sur l'ensemble E des sommets est transitive : la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur d'une arête, par exemple $[AB]$, applique A sur B. Comme l'ensemble des arêtes est un graphe connexe, en composant diverses symétries, on peut appliquer le sommet A sur tout autre sommet. L'orbite de A est E, donc

$$8 = Card(E) = \frac{|G|}{|G_A|} = \frac{|G|}{6} \qquad \text{donc } |G| = 48$$

2. Dans l'action de H, d'ordre 3 sur E, les orbites sont d'ordre 1 ou 3 et constituent une partition de E. Si tous les somemts étaient fixes par H, alors H serait réduit à $\{Id\}$, ce qui n'est pas le cas. Dans E (de cardinal 8), il existe donc une orbite à 3 éléments, et 5 points fixes, ou bien 2 orbites à 3 éléments et 2 points fixes. Ainsi, H laisse fixes au moins deux sommets, et d'après ce qui précède, laisse fixes deux sommets opposés. Si, par exemple, ces sommets sont A et C', on a $H \subset G_A \simeq S_3$, et H est l'unique sous-groupe d'ordre 3 de G_A, soit $\{Id, r, r^3\}$. Les éléments d'ordre 3 de G sont les 8 rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ d'axes l'une des 4 grandes diagonales du cube. Il y a 4 sous-groupes d'ordre 3. C'est conforme aux théorèmes de Sylow : $|G| = 482^4 \times 3$, donc le nombre de 3 sous-groupes de Sylow doit diviser 2^4 et être congru à 1 modulo 3, ce qui laisse comme possibilités 4 ou 16.

3. Soit $f \in G$. Comme $f \circ r_{(AC'),\frac{2\pi}{3}} \circ f^{-1}$ est un autre élément d'ordre 3 de G, c'est une rotation autour d'une des grandes diagonales de Γ. C'est aussi la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $f(AC')$. Donc f applique toute grande diagonale de Γ sur une autre grande diagonale. Comme il en est de même pour f^{-1}, on voit que f définit une permutation σ_f des grandes diagonales. Deux de ces diagonales, par exemple $[AC'], [BD']$, passent par le centre O, et définissent un plan. La symétrie orthogonale par rapport à ce plan échange les deux autres diagonales ($[CA'], [DB']$ dans notre exemple). Donc toute transposition de $\mathcal{S}_4$ est dans l'image de $\varphi : f \mapsto \sigma_f$.

   Les transpositions engendrent $\mathcal{S}_4$, donc $\varphi(G) = \mathcal{S}_4$. Par factorisation de φ, on obtient un isomorphisme $\overline{\varphi}$ de $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_4$, donc $[G : \mathrm{Ker}(\varphi)] = |\mathcal{S}_4| = 24$ et $|\mathrm{Ker}(\varphi)| = 2$. Or $\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient Id et la symétrie s_O par rapport au centre du cube. Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{Id, s_O\}$. De plus, tout élément f du centre $Z(G)$ de G est tel que $f \circ r_{(AC'),\frac{2\pi}{3}} \circ f^{-1} = r_{(AC'),\frac{2\pi}{3}}$, donc f laisse invariante la droite (AC'). Il en est de même des autres grandes diagonales, ce qui montre que $Z(G) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Par ailleurs, $S_O \in Z(G)$, car dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ d'origine O, l'application linéaire associée à s_O a pour matrice $-Id_{\mathcal{E}_3}$, élément du centre de $GL_3(\mathbb{R})$. Donc $Z(G) = \{Id, s_O\} = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. Le groupe Iso^+ des déplacements étant distingué dans Iso, on voit que $G^+ = G \cap Iso^+$ est distingué dans G. On a $G \cap Iso^- = G^- = s_O G^+$ car $s_O \in G^-$ et $s_O^2 = Id$. Cela montre que chacune des deux classes à gauche G^+ et s_O^G+ possède $\frac{|G|}{2} = 24$ éléments. On a $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap G^+ = \{Id\}$ car $s_O \in G^-$, donc la restriction de φ à G^+ est un homomorphisme injectif de G^+ dans $\mathcal{S}_4$ et $|\varphi(G^+)| = 24 = |\mathcal{S}_4|$. On en déduit que $\varphi(G^+) = \mathcal{S}_4$ et que G^+ est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.