Hausdorffien d'un endomorphisme normal

Gourdon, *Algèbre*, page 272

Théorème :
Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n \geq 1$. Pour tout endomorphisme f de E, on appelle Hausdorffien de f, noté $H(f)$, la partie de $\mathbb{C}$, compacte et convexe définie par :

$$H(f) = \{ < f(x)|x > \ , \ x \in E, \|x\| = 1\}$$

Alors :

1. Si f est un endomorphime normal, alors $H(f)$ est exactement l'enveloppe convexe des valeurs propres de f.
2. En dimension 2, $H(f)$ est une ellipse de foyers les valeurs propres de f.
   De plus cette ellipse est dégénérée (c'est un segment) si et seulement si f est normal.

Preuve :

1. Soit f un endomorphisme normal de E. f est alors diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E :

$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

   Alors :

$$\begin{aligned} H(f) = \{< f(x)|x >, \|x\| = 1\} &= \left\{ \left\langle f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \middle| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle \quad , \quad \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i \quad , \quad \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\} \end{aligned}$$

   ce qui s'exprime en disant que $H(f)$ est l'enveloppe convexe des λ_i, ou encore que c'est l'intérieur d'un polygone dont les sommets dans $\mathbb{C}$ sont les λ_i.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Posons $g = f - \dfrac{tr(f)}{2} Id$, de sorte que $tr(g) = 0$.

   On sait alors qu'il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ dans laquelle la matrice de f a tous ses termes diagonaux nuls :

$$mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad a, b \in \mathbb{C}$$

   On écrit a et b sous forme exponentielle :

$$a = a_0 e^{i\alpha} \quad , \quad b = b_0 e^{i\beta}$$

   Si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ est un vecteur de E de norme 1, on a $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$, donc il existe $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $|x_1| = \cos(\omega)$ et $|x_2| = \sin(\omega)$. Posons :

$$\varphi = arg(x_1) - \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{et} \quad \theta = arg(x_2) - \varphi$$

   de sorte que :

$$x_1 = \cos(\omega) e^{i\left(\varphi + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad x_2 = \sin(\omega) e^{i(\theta+\varphi)}$$

   La donnée de ω, φ et θ détermine entièrement un vecteur x de norme 1. On donne alors avec ces notations, la valeur de $< f(x)|x >$:

$$< f(x)|x > = < f(x_1e_1 + x_2e_2)|x_1e_1 + x_2e_2 > = b x_1 \overline{x_2} + a \overline{x_1} x_2 = \frac{\sin(2\omega)}{2} e^{i(\alpha+\beta)/2} \left((a_0 + b_0)\cos\theta + i(a_0 - b_0)\sin\theta\right)$$

L'exponentielle complexe qui est en facteur fait subir une rotation à l'ensemble auquel elle est multipliée. Pour chaque $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fixé, l'autre facteur correspond à une ellipse, le ω variant continûment entre 0 et 1.
$H(g)$ est donc un disque elliptique, de longueurs $|a|+|b|$ et $\big||a|-|b|\big|$.
$H(f)$ est donc le translaté de $H(g)$ par le vecteur d'affixe $\dfrac{tr(f)}{2}$: c'est bien un disque elliptique.

Etudions le cas où f est normal.

De plus, si on note $\varepsilon = \dfrac{tr(f)}{2}$. Remarquons que :

$$ff^* = (g+\varepsilon Id)(g^* + \overline{\varepsilon} Id) = gg^* + \varepsilon g^* + \overline{\varepsilon} g + |\varepsilon|^2 Id$$

$$f^*f = (g^* + \overline{\varepsilon} Id)(g+\varepsilon Id) = g^* + \varepsilon g^* + \overline{\varepsilon} g + |\varepsilon|^2 Id = ff^* - gg^* + g^*g$$

Donc f normal si et seulement g est normal.
Or :

$$mat_{\mathcal{B}}(gg^*) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{b} \\ \overline{a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}$$

$$mat_{\mathcal{B}}(g^*g) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{b} \\ \overline{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 \end{pmatrix}$$

Donc g normal si et seulement si $|a| = |b|$. Autrement dit, si et seulement si $H(g)$ est dégénéré.

Montrons que les foyers de $H(f)$ sont exactement les valeurs propres de f.

On a vu que $H(g)$ est l'image par la rotation d'angle $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ du disque elliptique dont la frontière est l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne :

$$\frac{4x^2}{(|a|+|b|)^2} + \frac{4y^2}{(|a|-|b|)^2} = 1$$

Les foyers de $\mathcal{E}$ ont pour affixes c et $-c$ avec

$$c^2 = \left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^2 - \left(\frac{|a|-|b|}{2}\right)^2 = |a||b|$$

Les foyers de la frontière de $H(g)$ sont donc les points d'affixes ω_1 et ω_2 :

$$\omega_1 = \sqrt{|a||b|}e^{i(\alpha+\beta)/2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = -\sqrt{|a||b|}e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

autrement dit, les deux racines carrées de ab. Or le polynôme caractéristique de g est $X^2 - ab$, les foyers de $H(g)$ sont donc bien les valeurs propres de g.
Or, par translation, les foyers de $H(f)$ sont les nombres $\omega_1 + \varepsilon$ et $\omega_2 + \varepsilon$. Comme $f = g + \varepsilon Id$, on a :

$$\chi_f(X) = \det(f - XId) = \det(g - (X-\varepsilon)Id) = \chi_g(X-\varepsilon) = (X - \varepsilon - \omega_1)(X - \varepsilon - \omega_2)$$

Les valeurs propres de f sont donc exactement les valeurs propres de f.