Inégalité de Sylvester

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1*, page 250

Exercice : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, a et b deux endomorphismes de E.

1. Comparer $rg(a+b)$ à $rg(a)+rg(b)$ et $rg(a)-rg(b)$.
2. Prouver l'équivalence :

$$rg(a+n) = rg(a)+rg(b) \iff \mathrm{Im}(a)\cap\mathrm{Im}(b) = \{0\} \text{ et } \mathrm{Ker}a+\mathrm{Ker}b = E$$

3. Montrer que

$$rg(a)+rg(b)-n \leq rg(ab) \leq \min(rg(a), rg(b))$$

C'est l'inégalité de Sylvester

1. De l'inclusion $\mathrm{Im}(a+b)\subset \mathrm{Im}a+\mathrm{Im}b$, on tire les inégalités ;

$$rg(a+b) \leq \dim(\mathrm{Im}a+\mathrm{Im}b) \leq \dim(\mathrm{Im}a)+\dim(\mathrm{Im}b) = rg(a)+rg(b)(*)$$

En appliquant ce résultat à $a+b$ et à $-b$, on obtient, compte tenu de l'égalité $rg(b) = rg(-b)$,

$$rg(a) \leq rg(a+b)+rg(-b) \leq rg(a+b)+rg(b)$$

c'est-à-dire

$$rg(a)-rg(b) \leq rg(a+b)$$

Par symétrie on a $rg(b)-rg(a) \leq rg(a+b)$. On conclut que

$$\boxed{|rg(a)-rg(b)| \leq rg(a+b) \leq rg(a)+rg(b)}$$

2. • Supposons que $rg(a+b) = rg(a)+rg(b)$. Toutes les inégalités de $(*)$ sont alors des égalités. On a en particulier $\dim(\mathrm{Im}a+\mathrm{Im}b) = \dim\mathrm{Im}a+\dim\mathrm{Im}b$. Sachant que $\dim(\mathrm{Im}a\cap\mathrm{Im}b) = \dim\mathrm{Im}a+\dim\mathrm{Im}b-\dim(\mathrm{Im}a+\mathrm{Im}b)$, on en déduit que $\mathrm{Im}a\cap\mathrm{Im}b = \{0\}$.

Ceci étant réalisé, notons qu'on a ensuite $\mathrm{Ker}(a+b) = \mathrm{Ker}a\cap\mathrm{Ker}b$. En efet, on a toujours $\mathrm{Ker}a\cap\mathrm{Ker}b\subset\mathrm{Ker}(a+b)$ et si $x\in\mathrm{Ker}(a+b)$, on peut écrire

$$a(x) = -b(x) \in \mathrm{Im}a\cap\mathrm{Im}b = \{0\}$$

et $x\in\mathrm{Ker}a\cap\mathrm{Ker}b$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}a+\mathrm{Ker}b) &= \dim(\mathrm{Ker}a)+\dim(\mathrm{Ker}b)-\dim(\mathrm{Ker}a\cap\mathrm{Ker}b)\\ &= \dim(\mathrm{Ker}a)+\dim(\mathrm{Ker}b)-\dim(\mathrm{Ker}(a+b))\\ &= n-rg(a)+n-rg(b)-n+rg(a+b) = n\end{aligned}$$

puisque $rg(a+b) = rg(a)+rg(b)$.

On a donc $\mathrm{Ker}a+\mathrm{Ker}b = E$.

• Supposons, réciproquement que $\mathrm{Im}a\cap\mathrm{Im}b = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}a+\mathrm{Ker}b = E$. Comme il a été démontré précédemment, on a alors $\mathrm{Ker}(a+b) = \mathrm{Ker}a\cap\mathrm{Ker}b$. On en déduit

$$\begin{aligned}rg(a+b) &= n-\dim\mathrm{Ker}(a+b) = n-\dim(\mathrm{Ker}a\cap\mathrm{Ker}b)\\ &= n-(\dim\mathrm{Ker}a+\dim\mathrm{Ker}b-\dim(\mathrm{Ker}a+\mathrm{Ker}b))\\ &= n-\dim\mathrm{Ker}a+n-\dim\mathrm{Ker}b \quad (\text{car Ker } a + \text{ Ker } b = E)\\ &= rg(a)+rg(b)\end{aligned}$$

3. De l'inclusion $\mathrm{Im}(ab) \subset \mathrm{Im}(a)$ résulte que $rg(ab) \leq rg(a)$. Mais on a aussi $\mathrm{Im}(ab) = a(textImb)$, d'où l'on déduit $rg(ab) \leq rg(b)$, car une application linéaire n'augmente pas la dimension des espaces vectoriels (cela résulte du théorème du rang). Finalement, on obtient

$$\boxed{rg(ab) \leq \min\left(rg(a), rg(b)\right)}$$

Pour obtenir l'autre inégalité, considérons la restriction a' de a à $\mathrm{Im}b$. Elle vérifie $\mathrm{Im}(a') = \mathrm{Im}(ab)$ et $\mathrm{Ker}a' = \mathrm{Ker}a \cap \mathrm{Im}b$. Le théorème du rang donne

$$\begin{array}{rcl} \dim \mathrm{Im}(ab) & = & \dim(\mathrm{Im}b) - \dim(\mathrm{Ker}a \cap \mathrm{Im}b) \\ & \geq & \dim(\mathrm{Im}b) - \dim(\mathrm{Ker}a) \geq rg(b) - (n - rg(a)) \end{array}$$

On obtient l'inégalité voulue :

$$\boxed{rg(ab) \geq rg(a) + rg(b) - n}$$