Intégrale de Gauss

Gourdon, *Analyse*, pages 163 et 329

Théorème :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1ère méthode : Utilisation d'une méthode variationnelle

Soit

$$g : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \end{array}$$

La fonction $(t,x) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ admet une dérivée partielle par rapport à x, continue. On en déduit (théorème de dérivabilité sous le signe intégral) que g est dérivable et que

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt$$

ce qui, après le changement de variable $u = tx$ donne

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2f'(x)f(x) \qquad \text{avec } f : x \mapsto \int_0^x e^{-u^2} du$$

En intégrant, on en déduit que

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) - g(0) = -\left(f^2(x) - f^2(0)\right) \qquad \text{donc } g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x)$$

Les inégalités $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2} \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ entraînent que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, et la fonction f étant positive, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$, ce qui s'écrit :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2ème méthode : Calcul par encadrement

La fonction logarithme est concave, elle se trouve donc en dessous de sa tangente en 1, ce qui s'écrit $\ln(1+x) \leq x$, $\forall x \in]-1,+\infty[$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall t \in]0, \sqrt{n}], \quad \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$$

En multipliant respectivement par n et $-n$, puis en prenant l'exponentielle, on en déduit que

$$\forall t \in]0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos u$ dans le membre de gauche, et $t = \sqrt{n}\mathrm{cotan} u$ dans le membre de droite, cette dernière assertion s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u du$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u du \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Ceci montre que les deux termes tendent vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ lorsque $n \to +\infty$, et en on déduit en faisant tendre n vers l'infini que

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3ème méthode : Passage en coordonnées polaires
Pour $a > 0$, on note

$$D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \le a^2\right\}, \quad C_a = [-a,a]^2 \quad \text{et} \quad I_a = \int\!\!\int_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

En passant en coordonnées polaires, puis en appliquant le théorème de Fubini, on a

$$\forall a > 0, \quad I_a = \int\!\!\int_{[0,a]\times[0,2\pi]} e^{-r^2} r dr d\theta = \left(\int_{[0,a]} e^{-r^2} r dr\right)\left(\int_{[0,2\pi]} d\theta\right) = \pi(1 - e^{-a^2})$$

En notant $J_a = \displaystyle\int\!\!\int_{C_a} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$, on a (toujours d'après Fubini),

$$J_a = \left(\int_{[-a,a]} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{[-a,a]} e^{-y^2} dy\right) = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right)^2$$

Or $D_a \subset C_a \subset D_{\sqrt{2}a}$, et la fonction intégrée étant positive, on en déduit que $I_a \le J_a \le J_{\sqrt{2}a}$, ce qui s'écrit encore

$$\forall a > 0, \quad \pi(1 - e^{-a^2}) \le \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right)^2 \le \pi(1 - e^{-2x^2})$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, d'où la valeur de I.