Calcul d'intégrales par développement en série de Fourier

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 2*, page 282

Exercice : Calculer pour $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{\mathrm{ch}a - \sin x}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{\mathrm{ch}a - \sin x}\, dx$$

Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}a - \sin x}$. Pour $a > 0$, f est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Il s'agit de calculer ses coefficients de Fourier. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc égale à sa série de Fourier. Pour déterminer celle-ci, on exprime $f(x)$ en fonction de e^{ix} et on utilise des développements en série entière.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}a - \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})} = \frac{2ie^{ix}}{-e^{2ix} + 2ie^{ix}\mathrm{ch}a + 1}$$

On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{2iX}{-X^2 + 2iX\mathrm{ch}a + 1}$ que l'on décompose en éléments simples. On obtient

$$F = \frac{-2iX}{(X - ie^a)(X - ie^{-a})} = -\frac{i}{\mathrm{sh}a}\left(\frac{e^a}{X - ie^a} - \frac{e^{-a}}{X - ie^{-a}}\right)$$

On en déduit que, pour tout réel x,

$$f(x) = -\frac{i}{\mathrm{sh}a}\left(\frac{e^a}{e^{ix} - ie^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix} - ie^{-a}}\right)$$

On développe chaque terme en série :

$$\frac{e^a}{e^{ix} - ie^a} = \frac{i}{1 + ie^{-a}e^{ix}} = i\sum_{n=0}^{+\infty}(-iee^{ix})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n i^{n+1}e^{-na}e^{inx}$$

car $|ie^{-a}e^{ix}| = e^{-a} < 1$ et, de même,

$$\frac{e^{-a}}{e^{ix} - ie^{-a}} = \frac{e^{-a}e^{ix}}{1 - ie^{-a}e^{-ix}} = e^{-a}e^{-ix}\sum_{n=0}^{+\infty}(ie^{-a}e^{-ix})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n e^{-(n+1)a}e^{-(n+1)ix}$$

Finalement, on peut écrire, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-i}{\mathrm{sh}a}\left(i + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-na}\left(i^{n+1}(-1)^n e^{inx} - i^{n-1}e^{-inx}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{sh}a}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-na}i^n\left((-1)^n e^{inx} + e^{-inx}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{sh}a}\left(1 + \sum_{p=1}^{+\infty} 2e^{-2pa}(-1)^p\cos 2px + \sum_{p=0}^{+\infty} 2e^{-(2p+1)a}(-1)^p \sin(2p+1)x\right)
\end{aligned}$$

Les séries $\sum e^{-2pa}(-1)^p\cos 2px$ et $\sum e^{-(2p+1)a}(-1)^p\sin(2p+1)x$ sont normalement convergentes, car pour tout réel x et tout entier p, $|e^{-2pa}(-1)^p\cos 2px|$ et $|e^{-(2p+1)a}(-1)^p\sin(2p+1)x|$ sont inférieurs à $(e^{-a})^{2p}$ avec $e^{-a} < 1$.

On en déduit que l'écriture précédente est le développement de f en série de Fourier. D'où l'on tire, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{I_0 = \frac{2}{\mathrm{sh}a}} \quad ; \quad \boxed{I_{2p} = \frac{2(-1)^p e^{-2pa}}{\mathrm{sh}a}} \text{ si } p \geq 1 \quad ; \quad \boxed{I_{2p+1} = 0}$$

$$\boxed{J_{2p} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{J_{2p+1} = \frac{2(-1)^p e^{-(2p+1)a}}{\mathrm{sh}a}}$$