Lemme de Gronwall

Gourdon, *Analyse*, page 371

Lemme de Gronwall : Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds$$

Posons $F(t) = \displaystyle\int_a^t \psi(s)y(s)ds$. En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée en hypothèse par $\psi(t)$, on obtient

$$F't) - \psi(t) \leq \varphi(t)\psi(t)$$

, ce qui s'écrit aussi

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right) \qquad \text{avec } G(t) = F(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

Comme $G(a) = F(a) = 0$, on en déduit, par intégration

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(-\int_a^s \psi(u)du\right)ds$$

Or par hypothèse, $y(t) \leq \varphi(t) + G(t)\exp\left(\displaystyle\int_a^t \psi(s)ds\right)$, d'où le résultat en utilisant l'inégalité ci-dessus.

Corollaire 1 : Soient ψ et $y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant

$$\exists c \geq 0 \;/\; \forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq c\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

Il s'agit du lemme de Gronwall dans le cas particulier où φ est contante égale à c, on a donc pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq c + \int_a^t c\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds = c + c\left[-\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)\right]_a^t = c\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

Corollaire 2 : Soit $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta \geq 0, \forall t \in [a,b], \quad \|y'(t)\| \leq \beta + \alpha\|y(t)\|$$

Alors,

$$\forall t \in [a,b], \quad \|y(t)\| \leq |y(a)\|e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha(t-a)} - 1\right)$$

Il suffit d'écrire, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\|y(t)\| \leq \|y(a)\| + \|y(t) - y(a)\| \leq \|y(a) + \int_a^t \|y'(t)\| \leq \|y(a)\| + \beta(t-a) + \alpha\int_a^t \|y(s)\|ds$$

puis on applique le lemme de Gronwall et on conlut en intégrant par parties.