Matrices stochastiques et racines de l'unité

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 2*, page 75

Théorème :
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i, j = 1 \dots n,\ a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i = 1 \dots n, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Alors :

1. 1 est valeur propre de A et toute valeur propre complexe λ de A vérifie $|\lambda| \leq 1$.
2. Soit λ une valeur propre de A de module 1, alors λ est une racine d-ième de l'unité avec $d \leq n$.
3. Si $\forall i = 1 \dots n$, $a_{ii} \neq 0$, alors la seule valeur propre de A de module 1 est 1.

Preuve :

1. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Alors, la deuxième condition qui définit la matrice A équivaut à $AU = A$.

   Donc 1 est bien valeur propre de A, et U est un vecteur propre associé.

   Soit $\lambda \in Sp(A)$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. Comme $AX = \lambda X$, en regardant la i-ième coordonnée, on obtient :

   $$p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n = \lambda x_i$$

   En passant au module, on obtient donc :

   $$|\lambda x_i| = |\lambda||x_i| = |p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n| \leq (p_{i1} + \ldots + p_{in})|x_i| = |x_i|$$

   On conclut donc que $|\lambda| \leq 1$.

2. Soit λ une valeur propre de A de module 1 et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

   On suppose que $\lambda \neq 1$ (sinon la question est triviale). La i-ième ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ conduit à

   $$\lambda - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$$

   On en déduit que

   $$1 - a_{ii} = |\lambda| - a_{ii} \leq |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij} \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij} = 1 - a_{ii}$$

   Les inégalités sont donc toutes des égalités. On en déduit donc plusieurs choses :

   - L'égalité $1 - a_{ii} = |\lambda - a_{ii}|$ montrer que λ est sur le cercle de centre a_{ii} et de rayon $1 - a_{ii}$. Si $a_{ii} > 0$ ce cercle est tangent intérieurement au cercle unité de $\mathbb{C}$ en 1. On aurait alors $\lambda = 1$, ce qui est exclu. On a donc nécessairement $a_{ii} = 0$. Il en résulte notamment que l'ensemble $I = \{j \neq i, a_{ij} \neq 0\}$ n'est pas vide.
   - D'après le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, les complexes $a_{ij}\dfrac{x_j}{x_i}$ pour $j \neq i$ sont tous sur une même demi-droite d'origine 0. Cela est intéressant uniquement si $a_{ij} \neq 0$, c'est-à-dire si $j \in I$.

- Pour $j \in I$, on a $a_{ij} \left|\dfrac{x_j}{x_i}\right| = a_{ij}$, c'est-à-dire, $|x_j| = |x_i|$.

En combinant ces deux derniers points, on obtient l'existence d'un réel θ tel que, pour tout $j \in I$, $x_j = e^{i\theta} x_i$. En remplaçant dans la relation de départ, on obtient

$$\lambda = e^{i\theta} \sum_{j \in I} a_{ij} = e^{i\theta} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = e^{i\theta}$$

Ainsi, $e^{i\theta} = \lambda$ et $x_j = \lambda x_i$ pour tout indice $j \in I$.

On en déduit donc en particulier que si x_i est une composante de X de module maximal, λx_i est encore une composante de X de module maximal.

De là, soit $m \geq 1$ le nombre de coordonnées de X de module maximal. Parmi les $m+1$ complexes x_i, λx_i, $\lambda^2 x_i$, $\ldots$, $\lambda^m x_i$, qui sont tous des composantes de X de module maximal, il y en a nécessairement deux qui sont égaux. Il existe donc $r < s$ tels que $\lambda^r x_i = \lambda^x x_i$ et comme $x_i \neq 0$, on a $\lambda^k = 1$ avec $k \in \{1, \ldots, n\}$ en posant $k = s - r$.

3. On a montré la contraposée dans le 2).