Méthode de Laplace

Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, page 339

Exercice : Soient $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, borné ou non, $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{t_0\varphi} f$ soit Lebesgue-intégrable sur $[a, b[$ pour un certain réel t_0. On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$.
On recherche un équivalent pour $t \to +\infty$ de l'intégrale

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx$$

1. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x$, montrer que
$$F(t) \sim \frac{f(0)}{t}$$
2. Si $\varphi' > 0$ sur $[a, b[$, montrer que
$$F(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} . \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t}$$
3. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$, montrer que
$$F(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} . \frac{f(0)}{\sqrt{t}}$$
4. Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, montrer que
$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} . \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$$
5. **Application :** Donner un équivalent pour $t \to +\infty$ de
$$\Gamma(t + 1) = \int_0^\infty e^{-x} x^t dx$$

Dans les questions 1 à 4, la fonction φ est croissante ; par suite, pour $t \geq t_0$, $a \leq x < b$,

$$\left|e^{-t\varphi(x)} f(x)\right| = e^{-(t-t_0)\varphi(x)} \left|e^{-t_0\varphi(x)} f(x)\right| \leq e^{-(t-t_0)\varphi(a)} \left|e^{-t_0\varphi(x)} f(x)\right|$$

et l'intégrale $F(t)$ converge pour tout $t \geq t_0$.

Pour simplifier les notations, on supposera $t_0 = 0$; on peut toujours s'y ramener en remplaçant $t - t_0$ par t et $e^{-t_0\varphi} f$ par f.

1. Comme f est continue à l'origine, elle est bornée au voisinage : il existe $M > 0$ et $\alpha \in]0, b[$ tels que $|f(x)| \leq M$ pour $0 \leq x \leq \alpha$. Alors, pour $t > 0$,
$$t \int_0^\alpha e^{-tx} f(x) dx = \int_0^{t\alpha} e^{-u} f\left(\frac{u}{t}\right) du \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-u} f(0) du = f(0)$$
Le passage à la limite sous l'intégrale est justifié par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, applicable grâce à l'inégalité de domination
$$\left|e^{-u} f\left(\frac{u}{t}\right) \chi_{[0,t\alpha]}(u)\right| \leq M e^{-u} \quad \text{pour } u \geq 0, t > 0$$
la fonction e^{-u} étant intégrable sur $[0, \infty[$. Ainsi
$$\int_0^\alpha e^{-tx} f(x) dx \underset{t\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}$$
De plus,
$$\left|\int_\alpha^b e^{-tx} f(x) dx\right| \leq e^{-t\alpha} \int_0^b |f(x)| dx$$
est à décroissance exponentielle vers 0, d'où l'équivalent demandé en assemblant les deux parties de l'intégrale.

2. D'après les hypothèses, l'application $x \mapsto y = \varphi(x) - \varphi(a)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b[$ sur un intervalle $[0, c[$. Soit φ l'application réciproque ; il vient

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-ty} f(\psi(y))\,\psi'(y)dy \sim e^{-t\varphi(a)} \frac{f(\psi(0))\,\psi'(0)}{t}$$

d'où le résultat compte tenu de $\psi(0) = a$, $\psi'(0) = \frac{1}{\varphi'(a)}$.

3. Même méthode que 1. D'une part, l'intégrale

$$\sqrt{t} \int_0^\alpha e^{-tx^2} f(x)dx = \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-u^2} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) du$$

tend par convergence dominée vers

$$\int_0^\infty e^{-u^2} f(0)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$$

si $|f(x)| \leq M$ sur $[0, \alpha]$, on a pour $u \geq 0$, $t > 0$,

$$\left| e^{-u^2} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) \chi_{[0,\alpha\sqrt{t}]}(u) \right| \leq M e^{-u^2}$$

D'autre part

$$\left| \int_\alpha^b e^{-tx^2} f(x)dx \right| \leq e^{-t\alpha^2} \int_0^b |f(x)|dx$$

par suite

$$F(t) \sim \frac{\sqrt{\pi} f(0)}{2\sqrt{t}}$$

4. D'après les hypothèses, l'application $x \mapsto y = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ de $[a, b[$ sur un intervalle $[0, c[$. En effet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}} \sim \frac{(x-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{(x-a)^2 \varphi''(a)/2}} = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}$$

lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, et la dérivée $\frac{dy}{dx}$ est donc strictement positive et continue jusqu'en $x = a$. On a ainsi $\varphi(x) = \varphi(a) + y^2$ (lemme de Morse à une variable).
Soit $x = \psi(y)$ l'application réciproque. Il vient

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-ty^2} f(\psi(y))\,\psi'(y)dy \sim e^{-t\varphi(a)} \frac{\sqrt{\pi} f(\psi(0))\,\psi'(0)}{2\sqrt{t}}$$

d'où le résultat, compte tenu de $\psi(0) = a$, $\psi'(0) = \sqrt{2/\varphi''(a)}$.

5. Il suffit d'appliquer 4 avec $\varphi(0) = \varphi''(0) = 1$, $f = 1$ et $t_0 > 0$, à chacune des deux intégrales

$$\int_0^\infty e^{-t\varphi(u)}du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \int_{-1}^0 e^{-t\varphi(u)}du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}$$

Il vient donc en ajoutant

$$\Gamma(t+1) \sim t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}$$

pour $t \to \infty$ d'où pour n entier, l'équivalent classique

$$\Gamma(n+1) = n!$$