Méthode de la Matrice de Transfert

Stanley, *Enumerative combinatorics vol. 2*, page 241

Exercice : Soit $G = (V, E)$ un graphe, $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$. Soit ω une fonction poids sur E tel que $\forall \Gamma = e_1 e_2 \ldots e_n \in E^n$, $\omega(\Gamma) = \prod_{i=1}^{n} \omega(e_i)$. On définit

$$A_{ij}(n) = \sum_{\Gamma} \omega(\Gamma)$$

pour tous les Γ chemins de longueur n entre v_i et v_j. On note A la matrice d'adjacence du graphe G (c'est-à-dire $(A)_{i,j} = A_{ij}(1)$).
Alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i, j \in \{1, \ldots, p\}$
$$A_{ij}(n) = (A^n)_{i,j}$$

2. $$F_{ij}(x) = \sum_{n \geq 0} A_{ij}(n) x^n = \frac{(-1)^{i+j} \det(I - xA : j, i)}{\det(I - xA)}$$
où $(B : j, i)$ désigne la matrice B privée de L_j et C_i. En particulier, $F_{ij}(x)$ est rationnel en x de degré stritement inférieur à n_0, muliplicité de 0 comme valeur propre de A.

3. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$C(n) = \sum_{\Gamma} \omega(\Gamma)$$
pour tous les Γ chemins fermés de longueur n dans G. Alors, en notant $Q(x) = \det(I - xA)$,
$$\sum_{n \geq 1} C(n) x^n = -\frac{xQ'(x)}{Q(x)}$$

1. C'est une application directe de la multiplication des matrices :
$$(A^n)_{i,j} = \sum A_{i,i_1} A_{i_1,i_2} \ldots A_{i_{n-1},j}$$
sur toutes les suites $(i_1, \ldots i_{n-1}) \in \{1, \ldots, p\}^{n-1}$. Le terme est non nul seulement s'il existe un chemin $\Gamma : e_1 e_2 \ldots e_n$ de v_i à v_j.

2. $F_{ij}(x)$ est l'entrée $(i - j)$ de la matrice $\sum_{n \geq 0} x^n A^n = (I - xA)^{-1}$. D'où, d'après la formule de la comatrice,
$$F_{ij}(x) = \frac{(-1)^{i+j} \det(I - xA : j, i)}{\det(I - xA)}$$
De plus,
$$\det(I - xA) = 1 + \alpha_1 x + \ldots x_{p-n_0} x^{p-n_0}$$
en notant le polynôme caractéristique de A :
$$\chi_A(x) = (-1)^p (\alpha_{p-n_0} x^{n_0} + \ldots + \alpha_1 x^{p-1} + x^p)$$
Donc, en tant que polynômes en x, on a $\deg \det(I - xA) = p - n_0$ et $\deg \det(I - xA : j - i) \leq p - 1$. D'où
$$\deg F_{ij}(x) \leq p - 1 - (p - n_0) < n_0$$

3. On a $C(n) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}(n) = trA^n$. Soit $\lambda_1, \ldots \lambda_q$ les valeurs propres non nulles de A. Alors $trA^n = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^n$. D'où
$$\sum_{n \geq 1} C(n) x^n = \sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i x}{1 - \lambda_i x}$$
qui est exactement la décomposition en éléments simples de $-\frac{xQ'(x)}{Q(x)}$ où $Q(x) = (1 - \lambda_1 x) \ldots (1 - \lambda_q x)$