Nombre moyen de diviseurs des entiers inférieurs à x

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, page 160

Exercice : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note τ_n le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$. Si $x \in [1, +\infty[$, on pose $F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \tau_n$.

1. Trouver un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Démontrer que lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F(x) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O\left(\sqrt{x}\right)$$

1. Soit $x \geq 1$. Les indices sous les signes de sommations désignent toujours des entiers naturels non nuls. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d \mid n} 1 = \sum_{\substack{n \leq x \\ d \mid n}} 1, \quad \text{par associativité} \\ &= \sum_{\substack{d, d' \leq x \\ dd' \leq x}} 1, \quad \text{par changement d'indices } d' = \frac{n}{d} \\ &= \sum_{d \leq x} \sum_{d' \leq E(x/d)} 1, \quad \text{par associativité,} \\ &= \sum_{d \leq x} E\left(\frac{x}{d}\right) \end{aligned}$$

Pour tout $1 \leq d \leq x$, on a $\frac{x}{d} - 1 \leq E\left(\frac{x}{d}\right) \leq \frac{x}{d}$, ce qui donne l'encadrement suivant :

$$\sum_{d \leq x} \left(\frac{x}{d} - 1\right) \leq F(x) \leq \sum_{d \leq x} \frac{x}{d}$$

ou encore

$$x \sum_{d=1}^{E(x)} \frac{1}{d} - E(x) \leq F(x) \leq x \sum_{d=1}^{E(x)} \frac{1}{d}$$

Or $\sum_{d=1}^{E(x)} \frac{1}{d} \underset{x\infty}{\sim} \ln E(x) \underset{x\infty}{\sim} \ln x$. On en déduit que

$$\boxed{F(x) \underset{x\infty}{\sim} x \ln x}$$

2. Il ne sert à rien de pousser le développement de $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$ un cran plus loin car dans l'encadrement de $F(x)$ ci-dessus, l'écart entre le majorant et le minorant est en $O(x)$. Pour avoir un développement asymptotique de F en $O\left(\sqrt{x}\right)$, on va utiliser une autre expression de F. L'idée est de couper la somme $F(x) = \sum_{dd' \leq x} 1$ selon la position de d et d' par rapport à $\sqrt{x}$. Si $dd' \leq x$, on a soit $d \leq \sqrt{x}$ soit $d' \leq \sqrt{x}$. Par conséquent, on a

$$F(x) = 2 \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ dd' \leq x}} 1 - \sum_{d, d' \leq \sqrt{x}} 1$$

ce qui donne

$$F(x) = 2 \left(\sum_{d \leq \sqrt{x}} E\left(\frac{x}{d}\right) \right) - E\left(\sqrt{x}\right)^2$$

On a une somme du même type que précédemment, mais avec un nombre de termes de l'ordre de $\sqrt{x}$. On va pouvoir en déduire le développement de F avec la précision souhaitée encore à l'aide de l'encadrement $u-1 \leq E(u) \leq u$ pour $u \in \mathbb{R}$. Il vient, pour x tendant vers l'infini

$$F(x) = 2\sum_{d\leq\sqrt{x}} \frac{x}{d} + O(\sqrt{x}) - \big(x + O(\sqrt{x})\big)$$

et

$$\sum_{d=1}^{E(\sqrt{x})} \frac{x}{d} = x\left(\ln E(\sqrt{x}) + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = x\left(\ln\big(\sqrt{x}+O(1)\big) + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$$

Or, $\ln\big(\sqrt{x}+O(1)\big) = \ln\sqrt{x} + \ln\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln x + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc,

$$\sum_{d=1}^{E(\sqrt{x})} \frac{x}{d} = \frac{1}{2}x\ln x + \gamma x + O\left(\sqrt{x}\right)$$

Par conséquent,

$$\boxed{F(x) = x\ln x + (2\gamma-1)x + O\left(\sqrt{x}\right)}$$