Point de Fermat

Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, page 376

Théorème :
Soit ABC un triangle (non aplati) du plan, tel que ses trois angles soient strictement inférieurs à $2\pi/3$. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ M & \mapsto & f(M) = MA + MB + MC \end{array}$$

Alors :

- Le minimum de f est atteint au moins une fois en un point P intérieur au triangle ABC et distinct de A, B, C.
- P est unique et f admet un minimum global strict en P.
- Si ABC', BCA' et ACB' désignent les triangles équilatéraux construits à l'extérieur de ABC, alors les droites AA', BB', et CC' concourent en P et on a
$$f(P) = AA' = BB' = CC'$$

- L'idée est que, la fonction f tendant vers l'infini à l'infini, il suffit de rechercher son minimum sur un compact. Si O est une origine quelconque, on a $MA \geq OM - OA$ par l'inégalité triangulaire, d'où
$$f(M) \geq 3OM - f(O)$$
et en particulier $f(M) > f(O)$ dès que $OM > (2/3)f(O)$. Sur le disque compact $OM \leq (2/3)f(O)$, la fonction continue f atteint son minimum en (au moins) un point P, qui donne aussi le minimum de f sur tout le plan.

  Montrons que P ne peut pas être un sommet du triangle ABC. Deux au moins de ses trois angles sont strictement inférieurs à $\pi/2$, par exemple les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Le pied H de la hauteur issue de A est alors entre B et C (strictement), d'où
$$f(H) = HA + HB + HC = HA + BC < BA + BC = f(B)$$
  De même, $f(H) < f(C)$: le minimum de f n'est donc atteint ni en B ni en C.

  Il n'est pas non plus attetn en A : c'est clair si $\widehat{A} < \pi/2$ par le raisonnement précédent, mais le cas où $\pi/2 \leq \widehat{A} < 2\pi/3$ demande un autre argument. Considérons par exemple un point M voisin de A sur la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A} = 2\alpha$. On a
$$MB^2 = AB^2 - 2AB.AM\cos\alpha + AM^2$$
  d'où par développement limité de la racine carrée,
$$MB = AB - AM\cos\alpha + O\left(AM^2\right)$$
  lorsque M tend vers A sur la bissectrice. En évaluant de même MC on obtient
$$f(M) = f(A) + (1 - 2\cos\alpha)AM + O\left(AM^2\right)$$
  Comme $0 < 2\alpha < 2\pi/3$ par hypothèse, on a $1 - 2\cos\alpha < 0$, d'où $f(M) < f(A)$ lorsque M est assez voisin de A sur la bissectrice ; le minimum de f ne peut donc pas être atteint en A.

  Enfin le minimum de f ne peut être atteint en un point P strictement extérieur au triangle ABC : si par exemple P et A sont de part et d'autre de la droite BC, la symétrique P' de P par rapport à cette droite donne $P'A < PA$, $P'B = PB$, $P'C = PC$, d'où $f(P') < f(P)$.

- D'après le premier point, le minimum de f sur le plan est aussi son minimum sur le complémentaire de $\{A, B, C\}$. Sur cet ouvert, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et on a,
$$\overrightarrow{grad} f(P) = -\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right)$$
  avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PA}/PA$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PB}/PC$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PC}/PC$ (vecteurs unitaires). La condition nécessaire d'extremum en P s'écrit donc
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = 0$$

Elle entraîne

$$1 = \overrightarrow{w}^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = 1 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + 1$$

par suite $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -1/2$, d'où $\widehat{APB} = 2\pi/3$ et de même pour les angles $\widehat{BPC}$ et $\widehat{CPA}$.

Du point P, on voit le segment AB sous l'angle $2\pi/3$, donc P appartient à un arc de cercle d'extrémités A et B (arc capable), et de même à un arc capable d'extrémités A et C. Ces deux arcs se coupent en deux points au plus : l'un d'eux est A, l'autre est P (distinct de A). Finalement la fonction f atteitn son minimum global en un unique point P appelé *point de Fermat* du triangle ABC, intersection des trois arcs capables d'où l'on voit chacun des trois côtés du triangle sous l'angle $2\pi/3$. C'est un minimum strict puisqu'il n'est atteint en aucun autre point.

- On oriente le plan de manière à ce que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (dans cet ordre) forment une base directe. Le point B' de l'énoncé se déduit alors de C par la rotation de centre A et d'angle $+\pi/3$. Soit M un point quelconque et soit M' son image par cette rotation. Le triangle AMM' est équilatéral, d'où

$$f(M) = MA + MB + MC = MM' + MB + M'B' = BM + MM' + M'B' \geq BB'$$

par l'inégalité triangulaire. SI on prend pour M le points de Fermat P (et pour M' son transformé P' par la rotation), on a de plus

$$\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \left(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PA}\right) = \frac{\pi}{3}$$

(angles orientés de vecteurs), d'où $\left(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PB}\right) = \pi$ et les points B, P, P' sont alignés (dans cet ordre).

De même,

$$\left(\overrightarrow{P'B'}, \overrightarrow{P'A}\right) = \left(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \left(\overrightarrow{P'A}, \overrightarrow{P'P}\right) = \frac{\pi}{3}$$

d'où $\left(\overrightarrow{P'B'}, \overrightarrow{P'P}\right) = \pi$ et les points P, P', B' sont alignés (dans cet ordre). Par suite P et P' appartient à la droite BB' et

$$f(P = BP + PP' + P'B = BB'$$

On montrerait de même que le point de Fermat appartient aux droites AA' et CC', ce qui donne une construction géométrique simple de ce point (le point P est ainsi l'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC', BCA' et CAB') et que $f(P) = AA' = BB' = CC'$.

Remarquons que si l'un des angles du triangle ABC (par exemple $\widehat{A}$) est supérieur ou égal à $2\pi/3$, on peut montrer en adaptant la méthode du troisième point, que le minimum de la fonction f est atteint en A.