Position d'un photographe

Audin, *Géométrie*, pages 284-393

(Sidler, *Géométrie projective*, page 108)

Théorème :
Soient A, B, C, D quatre points quelconques du plan P dont trois ne sont jamais alignés.

1. Tout point M du plan, distinct de A, B, C et D est sur une unique conique du faisceau à points bases A, B, C et D.
2. Soit ρ un scalaire. Alors l'ensemble :

$$\{M \in P \;/\; [MA, MB, MC, MD] = \rho\}$$

est une conique qui passe par A, B, C et D.

Preuve :
Les points A, B, C et D forment un repère projectif. On peut donc fixer des coordonnées telles que

$$A = (1, 0, 0) \quad , \quad B = (0, 1, 0) \quad , \quad C = (0, 0, 1) \quad , \quad D = (1, 1, 1)$$

(la droite (AB) est la droite à l'infini : $Z = 0$).
Une conique quelconque dans ce repère a donc une équation du type :

$$\mathcal{C} : aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0$$

Le fait que la conique $\mathcal{C}$ passe par les points A, B, C et D se traduit par :

$$a = b = c = 0 \quad \text{et} \quad d + e + f = 0$$

Le faisceau à points bases A, B, C et D est alors celui des coniques d'équation :

$$dXY + eXZ + (-d - e)YZ = 0$$

Autrement dit :

$$dY(X - Z) - eZ(Y - X) = 0$$

Le couple de coordonnées homogènes (d, e) est bien déterminée par la donnée des coordonnées (x_0, y_0, z_0) du point M, sauf si $y_0(x_0 - z_0) = 0$ et $x_0(y_0 - z_0) = 0$, c'est-à-dire si M est un des quatre points-bases.

Avec les mêmes notations, si M est un point non aligné avec A, B, C, D, les droites AM, BM, CM et DM ont pour équations :

$$AM : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & X \\ 0 & y_0 & Y \\ 0 & z_0 & Z \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow AM : y_0 Z - z_0 Y = 0$$

$$BM : \begin{vmatrix} 0 & x_0 & X \\ 1 & y_0 & Y \\ 0 & z_0 & Z \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow BM : x_0 Z - z_0 X = 0$$

$$CM : \begin{vmatrix} 0 & x_0 & X \\ 0 & y_0 & Y \\ 1 & z_0 & Z \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow CM : x_0 Y - y_0 X = 0$$

$$DM : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & X \\ 1 & y_0 & Y \\ 1 & z_0 & Z \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow DM : (x_0 - z_0)(Y - Z) - (y_0 - z_0)(X - Z) = 0$$

En notant L_{UV} une équation de la droite UV, on a :

$$\begin{cases} L_{MC} = -x_0 L_{MA} + y_0 L_{MB} \\ L_{MD} = -(x_0 - z_0) L_{MA} + (y_0 - z_0) L_{MB} \end{cases}$$

de sorte que la formule pour le birapport donne :

$$\rho = [MA, MB, MC, MD] = \frac{\begin{vmatrix} -x_0 & 1 \\ y_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -x_0 & 0 \\ y_0 & 1 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} -(x_0 - z_0) & 1 \\ y_0 - z_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(x_0 - z_0) & 0 \\ y_0 - z_0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y_0(z_0 - x_0)}{x_0(z_0 - y_0)}$$

Le lieu recherché est donc bien une conique passant par A, B, C et D, celle d'équation

$$y_0(z_0 - x_0) - \rho x_0(z_0 - y_0) = 0$$

Application : Position du photographe.

On dispose d'une carte panoramique et du plan d'une ville. Déterminer le lieu d'où la photographie a été prise.

On choisit dans le plan le plus éloigné de la carte postale cinq points représentant des bâtiments repérables sur le plan de la ville. On désigne par A, B, C, D, E ces points sur la carte. Sur la photographie, ces points sont devenus les points A', B', C', D', E'.

Si on suppose que la ville est plane, l'appareil photographique réalise une perspective entre le plan qui contient les bâtiments et la plaque photosensible, le centre de la perspective étant l'objectif lui-même, situé en un point O.

Sur la photographie, on mesure les distances entre les points et on calcule les birapports

$$\rho_1 = [A', B', C', D'] \quad \text{et} \quad \rho_2 = [A', B', C', E']$$

Comme les homographies conservent le birapport, on a donc que

$$[OA, OB, OC, OD] = [A', B', C', D'] = \rho_1 \quad \text{et} \quad [OA, OB, OC, OE] = [A', B', C', E'] = \rho_2$$

Le théorème précédent nous indique alors que O appartient à la conique Γ_1 qui passe par A, B, C, D et qui est caractérisée par le birapport :

$$[MA, MB, MC, MD] = \rho_1$$

De même, O est sur la conique Γ_2 qui passe par A, B, C, E et qui est caractérisée par le birapport :

$$[MA, MB, MC, ME] = \rho_2$$

Les coniques Γ_1 et Γ_2 ayant A, B, C en commun, le point O est donc leur quatrième point d'intersection.