Principe des zéros isolés

Jean-François Pabion, *Eléments d'analyse complexe*, page 68

Théorème : Si z_0 est un zéro isolé d'une fonction holomorphe F, il existe un voisinage de z_0 dans lequel F n'a pas d'autre zéro que ce point.

Lemme 1 : *Soit z_0 un zéro d'une fonction holomorphe F. Alors sont équivalents :*

1. *$F(z) = 0$ pour tous les points d'un voisinage de z_0.*
2. *$\forall k \geq 0$, $F^{(k)}(z) = 0$.*

Preuve : 1. $\Rightarrow$ 2. est évident. Supposons 2. Soit $r > 0$ tel que F existe dans le disque ouvert $D(z_0, r[$. On a dans ce disque

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

Donc $F(z) = 0$ pour tout $z \in D(z_0, r[$.

Lemme 2 : *Soit F une fonction holomorphe dans un ouvert Ω. Si z_0 est un zéro isolé de F, il existe un unique entier positif p tel que F se mette sous la forme suivante :*

$$F(z) = (z - z_0)^p F_1(z)$$

où F_1 est holomorphe dans Ω et vérifie $F_1(z_0) \neq 0$.

Preuve : Puisque la condition 2. du Lemme 1 n'est pas remplie, il existe un entier k tel que $F^{(k)}(z_0) \neq 0$. Soit p le plus petit entier qui ait cette propriété. Puisque $F(z_0) = 0$, $p > 0$. Soit r un réel positif tel que $D(z_0, r[\subset \Omega$. On a pour $z \in D(z_0, r[$:

$$F(z) = (z - z_0)^p \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-p}$$

Posons pour $z \in D(z_0, r[$:

$$f(z) = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-p}$$

et pour $z \in \Omega \backslash \{z_0\}$,

$$g(z) = \frac{F(z)}{(z - z_0)^p}$$

f et g sont holomorphes dans leurs ouverts de définition, et sur la partie commune de ceux-ci, définie par

$$0 < |z - z_0| < r$$

f et g coïncident. Donc f et g définissent par recollement une fonction F_1 holomorphe dans Ω et qui vérifie bien

$$F(z) = (z - z_0)^p F_1(z)$$

De plus, $F_1(z_0) = \frac{F^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0$.

Enfin, pour toute écriture de F sous la forme :

$$F(z) = (z - z_0)^m G(z)$$

où G est holomorphe dans Ω et $G(z_0) \neq 0$, on a pour tout entier k :

- si $k < m$, $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{F(z)}{(z - z_0)^k} = 0$.
- si $k > m$, $\lim\limits_{z \to z_0} \left| \dfrac{F(z)}{(z - z_0)^k} \right| = +\infty$.

Donc il existe au plus un entier qui convient à une telle décomposition.

Preuve du théorème : On part de la décomposition de F donnée par le Lemme 2 :

$$F(z) = (z - z_0)^p F_1(z)$$

F_1 étant continue et non nulle en z_0, il existe $r > 0$ tel que $|z - z_0| < r$ implique $F_1(z) \neq 0$. z_0 est alors le seul zéro de F dans le disque $D(z_0, r[$.