Processus de Poisson

Foata-Fuchs, *Processus stochastiques*, page 32
Cottrel-Duhamel, *Exercices de probabilités*, page 97

Théorème :
Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d., qui suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On lui associe un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ en convenant que le n-ième top a lieu à l'instant $S_n = T_1 + \ldots + T_n$. En posant $S_0 = 0$, on suppose donc :

$$N(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$$

1. Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $N(t)$ (qui représente le nombre de tops se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$) suit la loi de Poisson de paramètre λt.
2. La loi conditionnelle de $(S_1, \ldots, S_n)$ sachant $N(t) = n$ est la loi de la statistique d'ordre $(U_{(1)}, \ldots, U_{(2)})$ de n v.a.i.i.d. U_i de loi uniforme sur $[0, t]$.

1. La première chose à remarquer est que les événements $\{S_n \leq t\}$ et $\{N(t) \geq n\}$ sont égaux, pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   En effet, l'instant où se produit se n-ième top est inférieur ou égal à t, si et seulement si, dans l'intervalle de temps $[0, t]$, il s'est produit au moins n tops.

   On en déduit donc que :

   $$\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(N(t) \geq n) - \mathbb{P}(N(t) \geq n + 1) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$$

   Comme les T_i suivent des lois indépendantes exponentielles de paramètre $\lambda > 0$, S_n suit une loi Gamma de paramètre (n, λ), autrement dit la loi de densité :

   $$f(s) = \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda s} (\lambda s)^{n-1} \mathbf{1}_{s\geq 0}$$

   Ainsi :

   $$\mathbb{P}(N(t) = n) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dx$$

   On fait donc une intégration par parties dans la deuxième intégrale :

   $$u(x) = x^n, \quad v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad u'(x) = n x^{n-1}, \quad v(x) = -e^{-\lambda x}$$

   L'intégrale vaut alors :

   $$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dx = \left[-\frac{\lambda^n}{n!} x^n e^{-\lambda x} \right]_0^t + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

   On obtient donc :

   $$\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

   et on reconnaît bien la loi de Poisson de paramètre λt.

2. Soit h une fonction borélienne positive définie sur $\mathbb{R}^n$. Puisque les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on a :

   $$\mathbb{E}(h(S_1, \ldots, S_n)) = \int_D h(x_1, x_1 + x_2 + \ldots, x_1 + \ldots + x_n) \lambda^n e^{-\lambda} (x_1 + \ldots + x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

   où D est l'ensemble des points de coordonnées positives.

   En effectuant le changement de variables $s_i = x_1 + \ldots + x_i, i = 1 \ldots n$, on obtient :

   $$\mathbb{E}(h(S_1, \ldots, S_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(s_1, \ldots, s_n) \lambda^n e^{-\lambda s_n} \mathbf{1}_{0<s_1<\ldots<s_n} ds_1 \ldots ds_n$$

On en déduit donc la loi de $(S_1, \dots S_n)$ puisque sa densité est :

$$\lambda^n e^{-\lambda s_n} \mathbf{1}_{0<s_1<\dots<s_n}$$

Calculons à présent la loi conditionnelle de $(S_1, \dots, S_n)$ sachant $N(t) = n$ est définie par la valeur de $\mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) \in A \,\big|N(t) = n)$ pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$.

Or,

$$\mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) \in A \big| N(t) = n) = \frac{\mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) \in A, N(t) = n)}{P(N(t) = n)}$$

On sait que $\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, puisque $N(t)$ est une v.a. de Poisson de paramètre λt.

D'autre part, d'après le calcul de la loi de $(S_1, \dots, S_n)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) \in A, N(t) = n) &= \mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) \in A,\ S_n \leq t < S_{n+1}) \\
&= \iint_{A \times \mathbb{R}} \mathbf{1}_{0<s_1<\dots<s_n \leq t < s_{n+1}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}} ds_1 ds_2 \dots ds_{n+1} \\
&= \int_A \mathbf{1}_{0<s_1<\dots<s_n \leq t} \lambda^n ds_1 \dots ds_n \left(\int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s_{n+1}} ds_{n+1} \right) \\
&= \int_A e^{-\lambda t} \lambda^n \mathbf{1}_{0<s_1<\dots<s_n \leq t} ds_1 \dots ds_n
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) \in A \big| N(t) = n) = \int_A \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{0<s_1<\dots<s_n \leq t} ds_1 \dots ds_n$$

Donc la densité conditionnelle est donc :

$$\frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{0<s_1<\dots<s_n \leq t}$$

d'où le résultat.

Lemme :

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est une suite de n v.a.i.i.d. continues, de densité f, alors l'échantillon ordonné $X^* = (X_1^* < X_2^* < \dots < X_n^*)$ admet une densité conjointe donnée par :

$$\boxed{n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbf{1}_{x_1<x_2<\dots<x_n}}$$

On notera $E = \{(x_1, \dots, x_n), x_1 < x_2 < \dots x_n\}$.

A tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe $E(\omega)$ ensemble des vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_{\sigma(1)} < \dots x_{\sigma(n)}$.

Soit g la fonction qui envoie tout vecteur sur le réarrangement croissant de ses composantes. On a $X^* = g \circ X$. De plus, la restriction g_σ de g à $E(\sigma)$ envoie le vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $E(\sigma)$ sur le vecteur $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ de E.

g_σ est donc une transformation linéaire ayant pour matrice une matrice de permutation de jacobien égal à 1.

Ainsi, pour toute permutation σ et tout borélien B de E, on a, par le changement de variables $x \mapsto g_\sigma(x)$, en posant $f_X(x) = f(x_1) \dots f(x_n)$,

$$\int_{g_\sigma^{-1}(B)} f_X(x) dx = \int_B f_X(g_\sigma^{-1}(y)) dy$$

Or, si $\tau = \sigma^{-1}$, pour $y = (y_1 < \dots < y_n)$, on a :

$$f_X(g_\sigma^{-1}(y)) = f(y_{tau(1)}) \dots f(y_{\tau_n}) = f(y_1) \dots f(y_n) = f_X(y)$$

et donc :

$$\int_{g_\sigma^{-1}(B)} f_X(x) dx = \int_B f_X(y) dy$$

Comme $\mathbb{P}_{X^*}(B) = \mathbb{P}_(X^* \in B) = \mathbb{P}(g \circ X \in B) = \mathbb{P}_X(g \in B)$, on en déduit que

$$\mathbb{P}_{X^*}(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{(g \in B)} f_X(x) dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_{E(\sigma)} \mathbf{1}_{(g \in B)} f_X(x) dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_{g_\sigma^{-1}(B)} f_X(x) dx = \int_B n! f_X(y) dy$$

ce qui montre que la densité de X^* est $n! f(x_1) \dots f(x_n)$ sur E et 0 ailleurs.