# D15 - Prolongement de la fonction Γ d'Euler

Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*, page 313

**Proposition :** Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

1. La définition a bien un sens.
2. $x \mapsto \Gamma(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
3. La fonction $\Gamma$ se prolonge en une fonction holomorphe dans l'ouvert

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \Re z > 0\}$$

4. Pour tout $z \in \Omega$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. La fonction sous le signe intégral est positive.

   De plus, au voisinage de 0, elle est équivalente à $\dfrac{1}{t^{1-x}}$ qui est intégrable puisque $x$ est strictement positif.

   En $+\infty$, on a $t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$ puisque pour tout $x > 0$, on a $\lim\limits_{t\to\infty} t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$.

2. On va appliquer le Théorème de DSS. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{x\log t}t^{-1}e^{-t}$ est pour $t > 0$ fixé, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Pour $0 \leq j \leq k$, $\left|\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^j \left[t^{x-1}e^{-t}\right]\right| = (\log t)^j e^{x\log t}t^{-1}e^{-t}$. Par conséquent pour $x \in [\varepsilon, M]$, on a :

$$\begin{cases} \left|\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^j \left[t^{x-1}e^{-t}\right]\right| \leq |\log t|^j \, t^{\varepsilon-1} & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ \left|\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^j \left[t^{x-1}e^{-t}\right]\right| \leq (\log t)^j \, t^{M-1}e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

   Pour tout $0 \leq j \leq k$, la fonction $g(t) = \begin{cases} \dfrac{|\log t|^j}{t^{1-\varepsilon}} & 0 < t \leq 1 \\ (\log t)^j \, t^{M-1}e^{-t} & t \geq 1 \end{cases}$ est intégrable.

   On déduit du théorème de DSS que $\Gamma$ est $\mathcal{C}^k(]0, \infty[)$. Comme $k$ est arbitraire, cela prouve que $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0, \infty[)$.

3. Posons

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}e^{(z-1)\log t}dt \qquad \Re z > 0$$

   C'est une fonction holomorphe sur $\Omega$ d'après le Théorème d'HSS puisqu'à $t > 0$ fixé, $z \mapsto e^{z\log t}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et si $K$ est un compact de $\Omega$ on a $\Re z \in [\varepsilon, M]$ pour $z \in K$, où $\varepsilon > 0$ et donc

$$\begin{cases} \left|e^{-t}e^{(z-1)\log t}\right| \leq e^{(\varepsilon-1)\log t} = \dfrac{1}{t^{1-\varepsilon}} & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ \left|e^{-t}e^{(z-1)\log t}\right| \leq t^{(M-1)}e^{-t} & \text{si} \quad t \geq \end{cases}$$

   Cela redonne d'ailleurs le résultat du 2.

4. Il suffit d'intégrer par parties dans l'intégrale donnant $\Gamma(z+1)$ en posant $t^z = u$, $e^{-t}dt = du$. On en déduit que $\Gamma(n+1) = n!$ par récurrence sur $n$, en utilisant la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et en remarquant que $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}dt = 1$.

**Théorème :** Il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq -n, n \in \mathbb{N}\}$ qui coïncide avec la fonction $\Gamma(z)$ pour $z \in \Omega$. Ce prolongement de la fonction gamma sera encore noté $\Gamma(z)$.

A vrai dire, on sait déjà qu'un tel prolongement existe par la relation 4. de la proposition précédente. Il suffit de poser $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$, $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}$, etc ... pour définir de proche en proche une extension holomorphe de $\Gamma$ au plan complexe privé de $0$, $-1$, $-2$, etc ...

Mais on désire en savoir plus sur le prolongement en question, et en particulier savoir que $\Gamma(z) \neq 0$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq -n, n \in \mathbb{N}$. On adopte donc une approche un peu différente. Le point de départ est la formule suivante due à Euler :

$$\boxed{\forall z \in \Omega, \quad \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}}$$

En effet, considérons la suite de fonctions

$$f_n(t) = \mathbf{1}_{]0,n[}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}$$

où $\mathbf{1}_{]0,n[}(t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, n[$. Il est facile de voir que la suite $(f_n)$ converge simplement vers la fonction $f(t) = \mathbf{1}_{]0,\infty[}(t)e^{-t}t^{z-1}$. D'autre part, l'inégalité $1-u \leq e^u$ pour $0 \leq u \leq 1$ montre que $|f_n(t)| \leq \mathbf{1}_{]0,n[}(t) \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n t^{x-1} \leq \mathbf{1}_{]0,\infty[}(t)t^{x-1}e^{-t}$, où $x = \Re z > 0$. On déduit du théorème de convergence dominée que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = \lim_{n\infty} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

Posons $t = ns$ dans l'intégrale. Il vient $\Gamma(z) = \lim_{n\infty} n^z \displaystyle\int_0^1 s^{z-1}(1-s)^n ds = \lim_{n\infty} n^z I_n(z)$. Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$I_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} \qquad \forall z \in \Omega$$

En effet, la formule pour $n = 0$ est trivialement vraie. Dans l'intégrale donnant $I_{n+1}(z)$, posons $u = (1-s)^{n+1}$, $s^{z-1}ds = du$. Il vient

$$I_{n+1}(z) = \frac{n+1}{z} I_n(z+1) = \frac{(n+1)n!}{z(z+1)\ldots(z+n+1)} = \frac{(n+1)!}{z\ldots(z+n+1)}$$

On déduit de la formule d'Euler que pour $z \in \Omega$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\infty} \frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n^z n!}$$

(sous réserve que $\Gamma(z) \neq 0$, ce que l'on va prouver maintenant).

Considérons pour $z \in \mathbb{C}$ la fonction $G(z) = \lim_{n\infty} \dfrac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n^z} n!$.

On a $G(z) = \lim_{n\infty} \dfrac{z(z+1)\ldots(z+n)}{(n+1)^z n!} = \lim_{n\infty} G_n(z)$. Nous allons montrer que $G$ est bien définie dans $\mathbb{C}$ et que c'est une fonction entière. Comme $e^{-z\mathrm{Log}(n+1)} = \displaystyle\prod_{k=1}^n e^{z\mathrm{Log}\frac{k}{k+1}}$ et $n! = 1 \cdot 2 \ldots n$, on obtient

$$G_n(z) = z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{z\mathrm{Log}\frac{k}{k+1}} = z \prod_{k=1}^n f_k(z)$$

où chaque $f_k$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Soit $R > 0$ et $|z| < R$. Pour $n > R$, on écrit

$$G_n(z) = z \prod_{1 \leq k \leq R} f_k(z) \prod_{R < k \leq n} f_k(z)$$

Pour $k > R$, on a $\frac{|z|}{k} < 1$ et donc $f_k(z) = e^{\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right)}$ d'où

$$G_n(z) = z \prod_{1 \leq k \leq R} f_k(z) \exp \sum_{k=E(R)+1}^n \left(\mathrm{Log}\left(1 + \frac{z}{k}\right) - z\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$$

Or $\left|\mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{z}{k}\right) - z\mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)\right| \leq \dfrac{C(R)}{k^2}$ pour $k \geq E(R) + 1$ ; on en déduit que la série de terme général $\mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{z}{k}\right) - z\mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ converge uniformément dans $\{|z| < R\}$ vers une fonction holomorphe. On en déduit qu'il en est de même de la suite $(G_n)$. Comme $R$ est arbitraire, cela prouve que la fonction $G$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$. De plus, les zéros de $G$ sont les entiers négatifs. En effet $G(z) = z \displaystyle\prod_{k=1}^\infty f_k(z)$, et le produit infini convergent $\displaystyle\prod_{k=1}^\infty f_k$ a pour zéros les zéros des $f_k$, c'est-à-dire $-1$, $-2, \ldots$ On en déduit que la fonction $F(z) = \dfrac{1}{G(z)}$ est holomorphe sans zéros dans $\{z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq -n, n \in \mathbb{N}\}$ comme

$$F(z) = \lim_{n\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

la formule d'Euler montre que $F$ coïncide sur $\Omega$ avec la fonction $\Gamma$ : c'est donc le prolongement cherché. On note $F(z) = \Gamma(z)$. En résumé, $\Gamma(z)$ est holomorphe sans zéros dans $\{z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq -n, n \in \mathbb{N}\}$. Elle a des pôles simples aux points $z = -n$. Quant à la fonction $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$, elle est holomorphe dans tout $\mathbb{C}$ et les points $z = -n$ sont des zéros simples de cette fonction.