Racines itérées

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, page 80

Exercice : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{a_n}}}}$$

1. Etudier (u_n) lorsque (a_n) est constante égale à $a > 0$, puis lorsque $a_n = \lambda^{2^{n+1}}$, où $\lambda > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la suite $(a_n^{\frac{1}{2^n}})_{n\geq 0}$ est bornée.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}$.

1. Supposons tout d'abord que (a_n) est constante égale à $a > 0$. On a alors $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$ pour tout entier n, ce qui nous ramène à une suite récurrente classique. L'intervalle $\mathbb{R}^+$ est stable par $f : x \mapsto \sqrt{x+a}$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et y admet un unique point fixe $l = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Sur l'intervalle $[0, l]$, on a $f(x) > x$. Comme $u_0 = \sqrt{a} < l$, la suite (u_n) est croissante, majorée par l et converge donc nécessairement vers l.

   Supposons maintenant que $a_n = \lambda^{2^{n+1}}$. On a $u_0 = \sqrt{\lambda^2} = \lambda$, $u_1 = \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4}} = \lambda\sqrt{1+\sqrt{1}}$ et plus généralement, $u_n = \lambda\sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}}$. D'après le point précédent, (u_n) converge donc vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda$.

2. Commençons par observer que la suite (u_n) est toujours croissante, car comme $a_n \leq a_n + \sqrt{a_{n+1}}$, la croissance de la fonction racine carrée conduit à $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) converge donc si et seulement si elle est majorée. Notons aussi que si (a'_n) est une seconde suite de réels positifs qui vérifie $a_n \leq a'_n$ pour tout n, alors on a $u_n \leq u'_n$ pour tout n, (u'_n) étant la suite associée à (a'_n) de la même manière que (u_n) est associée à (a_n). Démontrons maintenant l'équivalence proposée.

   Si dans l'expression de u_n on minore $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ par 0, il vient $u_n \geq a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}}$. On a donc $a_n^{\frac{1}{2^n}} \leq u_n^2$ de sorte que si la suite (u_n) converge, la suite $\left(a_n^{\frac{1}{2^n}}\right)_{n\geq 0}$ est bornée. Montrons la réciproque.

   Il existe par hypothèse un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout n, $a_n^{\frac{1}{2^n}} \leq \lambda$. On en déduit que $a_n \leq \lambda^{2^n}$. Les remarques qui précèdent, associées au résultat de la première question, permettent d'affirmer que (u_n) converge.

3. En faisant passer les entiers $2, 3, \ldots$ dans les racines carrées qui suivent, on retrouve bien une suite du type précédent. En note (u_n) la suite proposée, on écrit ainsi,

$$u_2 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1+3}} = \sqrt{1 + \sqrt{2^2 + \sqrt{2^4.3^2}}}$$

$$u_3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1+4}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2^2 + \sqrt{2^4.3^2 + \sqrt{2^8.3^4.4^2}}}}$$

   Il s'agit donc de la suite (u_n) associée à la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_n = 2^{2^n}3^{2^{n-1}}\ldots n^4(n+1)^2$ pour tout $n \geq 1$. On utilise le critère de convergence de la question 2. On a pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{\ln a_n}{2^n} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\ln k}{2^{k-2}}$$

Il s'agit de la somme partielle d'une série convergente. La suite $\dfrac{\ln a_n}{2^n}$ converge, et en passant à l'exponentielle, la suite $\left(a_n^{\frac{1}{2^n}}\right)$ également. En particulier, elle est bornée. D'après la question précédente, la limite recherchée est finie. On demande toutefois ici de déterminer sa valeur. Une étude numérique semble indiquer que la limite est 3. Pour le démontrer, on va majorer la quantité $3 - u_n$ en multipliant chaque expression par sa conjuguée pour éliminer les racines carrées. On a, puisque $u_n \geq 1$,

$$|3 - u_n| = \frac{|9 - u_n^2|}{3 + u_n} \leq \frac{1}{4}|9 - u_n^2| \leq \frac{2}{4}\left|4 - \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\ldots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}\right|$$

On recommence la même majoration. Il vient

$$|3 - u_n| \leq \frac{2.3}{4.5}\left|5 - \sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{\ldots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}\right|$$

On réitère le procédé pour obtenir finalement,

$$|3 - u_n| \leq \frac{2.3\ldots(n-1)}{4.5\ldots(n+1)}\left(n + 1 - \sqrt{1+n}\right) \leq \frac{6}{n}$$

ce qui prouve que (u_n) converge vers 3.