Réduction des matrices symétriques réelles

Monier, *Algèbre MP*, page 139

Théorème : Soient $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Alors, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Autrement dit, $\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists(\Omega, D) \in O_n(\mathbb{R}) \times D_n(\mathbb{R})\ /\ S = \Omega D \Omega^{-1}$

Lemme 1 : *Soient $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Alors les sous-espaces propres pour f sont orthogonaux entre eux. C'est-à-dire, pour toutes valeurs propres λ,μ de f telles que $\lambda \neq \mu$ et tous vecteurs propres x associé à λ et y associé à μ, on a $< x, y >= 0$.*

En effet, si $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ tels que $\lambda \neq \mu$, $x \in SEP(f, \lambda)$, $y \in SEP(f, \mu)$. On a donc

$$x \neq 0, y \neq 0,\ f(x) = \lambda x,\ f(y) = \mu y$$

D'où : $\langle \lambda x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle$. Donc $(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = 0$ et finalement, $\langle x, y \rangle = 0$.

Lemme 2 : *Soit f un endomorphisme symétrique de E espace vectoriel euclidien. Alors, pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par f, $F^\perp$ est stable par f.*

En effet, soient F un sev de E stable par f et $x \in F^\perp$. On a : $\forall y \in F, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = 0$ car $x \in F^\perp$ et $f(y) \in F$. Donc on a $f(x) \in F^\perp$.

Preuve du théorème : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

La propriété est immédiate pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour un entier $n \geq 1$, et soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$, f un endomorphisme symétrique de E, $\mathcal{B}_1$ une base orthonormée de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$. Décomposons A en blocs:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tC \\ C & B \end{pmatrix}, \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R},\ C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R}), D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $B = \Omega D \Omega^{-1}$. En notant $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$, il est clair que U est orthogonale et $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega^{-1} \end{pmatrix}$, d'où après produit par blocs :

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tC\Omega \\ \Omega^{-1}C & D \end{pmatrix}$$

Notons $G = \Omega^{-1}C$ et $A' = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tG \\ G & D \end{pmatrix}$.

- Montrons que A' admet au moins une valeur propre et un vecteur propre.

  En notant $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$, on a $A' = \begin{pmatrix} \alpha & g_1 & \cdots & g_n \\ g_1 & d_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ g_n & 0 & & d_n \end{pmatrix}$.

  S'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $g_k = 0$, alors d_k est valeur propre de A' et un vecteur propre associé est E_{k+1}. Nous pouvons donc supposer que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, g_k \neq 0$.

  Soient $\lambda \in \mathbb{R}, V \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

  En décomposant V en blocs $V = \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

  $$A'V = \lambda V \iff \begin{pmatrix} \alpha & {}^tG \\ G & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha x + {}^tGX = \lambda x \\ xG + DX = \lambda X \end{cases}$$

  On peut supposer $d_1 \geq \dots d_n$. Supposons $\lambda > d_1$. Alors $D - \lambda I_n$ est inversible, et donc :

  $$A'V = \lambda V \iff \begin{cases} X = -x(D - \lambda I_n)^{-1}G \\ \alpha x - x\,{}^tG(D - \lambda I_n)^{-1}G = \lambda x \end{cases}$$

On a

$$^tG(D-\lambda I_n)^{-1}G+\lambda=\alpha \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{g_i^2}{d_i-\lambda}+\lambda=\alpha$$

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc}]d_1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{g_i^2}{d_i-\lambda}+\lambda \end{array}$ est continue sur $]d_1,+\infty[$, de limite $-\infty$ en d_1^+ et de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc (théorème des valeurs intermédiaires), il existe $\lambda \in]d_1,+\infty[$ tel que $\varphi(\lambda)=\alpha$.

On a ainsi montré que f admet au moins une valeur propre et un vecteur propre réels.

- En notant x_0 un vecteur propre pour f, $\mathbb{R}x_0$ est stable par f, donc d'après le Lemme, $(\mathbb{R}x_0)^\perp$ est aussi stable par f. Dans une base orthonormée de E commençant par $\dfrac{1}{\|x_0\|}x_0$, la matrice de f est donc de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\Omega_1 \in O_n(\mathbb{R}), D_1 \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $S=\Omega_1 D_1 \Omega_1^{-1}$. En notant $\Omega_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_1 \end{pmatrix}$ et $D_2=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$, il est clair que

$$\Omega_2 \in O_{n+1}(\mathbb{R}), D_2 \in D_{n+1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}=\Omega_2 D_2 \Omega_2^{-1}$$

Ceci montre qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Remarque : Une matrice symétrique *complexe* (d'ordre ≥ 2) peut ne pas être diagonalisable : $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Autre démonstration :

Posons $S=\{x \in E \ / \ \|x\|=1\}$, et $\varphi : \begin{array}{ccc} S & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x, f(x)\rangle \end{array}$.

- φ est continue sur un compact de E, donc bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $x_0 \in S$ tel que $\varphi(x_0)=\sup\limits_{x\in S}\varphi(x)$.
- Soit $x_1 \in E$ tel que (x_0,x_1) soit une famille orthonormale. Montrons que $\langle x_1, f(x_0)\rangle=0$.

  Considérons $\cos(\theta)x_0+\sin(\theta)x_1$ pour $\theta\in\mathbb{R}$. On a $\|\cos(\theta)x_0+\sin(\theta)x_1\|^2=\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ donc $\varphi(\cos(\theta)x_0+\sin(\theta)x_1)\leq\varphi(x_0)$. D'où en développant,

  $$2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\langle x_1, f(x_0)\rangle \leq \sin^2(\theta)\,(\langle x_0, f(x_0)\rangle-\langle x_1, f(x_1)\rangle)$$

  On a donc,

  $$\begin{cases} \forall\theta\in]0,\pi[, & 2\cos(\theta)\,\langle x_1, f(x_0)\rangle \leq \sin(\theta)\,(\langle x_0, f(x_0)\rangle-\langle x_1, f(x_1)\rangle) \\ \forall\theta\in]-\pi,0[, & 2\cos(\theta)\,\langle x_1, f(x_0)\rangle \geq \sin(\theta)\,(\langle x_0, f(x_0)\rangle-\langle x_1, f(x_1)\rangle) \end{cases}$$

  En faisant tendre θ vers 0^+ et 0^- respectivement, on déduit $\langle x_1, f(x_0)\rangle=0$.
- Alors montrons que x_0 est un vecteur propre de f.

  Soit $x\in x_0^\perp\backslash\{0\}$. On a $\left\langle \dfrac{1}{\|x\|}x, f(x_0)\right\rangle=0$, donc $\langle x, f(x_0)\rangle=0$.

  Ceci montre $x_0^\perp\subset(f(x_0))^\perp$ d'où, en passant aux orthogonaux :

  $$\mathbb{R}x_0=x_0^\perp\supset(f(x_0))^{\perp\perp}=\mathbb{R}f(x_0)$$

  AInsi $f(x_0)\in\mathbb{R}x_0$, donc x_0 est vecteur propre de f.