Sinus itéré

Gourdon, *Analyse*, page 218

Exercice : Soit (u_n) une suite vérifiant

$$u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

1. Montrer que (u_n) tend vers 0 puis donner un équivalent de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

1. L'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par la fonction sin, donc $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout n. De plus, on a $\sin x < x$ sur cet intervalle, donc la suite (u_n) est strictement décroissante. Par ailleurs, elle est minorée par 0, elle converge donc. Sa limite l vérifie $\sin(l) = l$, donc $l = 0$.

   Donnons maintenant un équivalent de (u_n). Remarquons que

   $$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\sin^2 u_n} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + O\left(u_n^2\right)\right)^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

   $$= \frac{1}{u_n^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{u_n^2}{3} + O\left(u_n^3\right)} - 1\right) = \frac{1}{u_n^2}\left(\frac{u_n^2}{3} + O\left(u_n^3\right)\right) = \frac{1}{3} + O\left(u_n\right) \sim \frac{1}{3}$$

   Cet équivalent montre que la série $\sum\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right)$ diverge, et en sommant les équivalents, on obtient

   $$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \sim \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3} = \frac{n}{3}$$

   Autrement dit, $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$ donc

   $$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}$$

2. On procède comme plus haut, en cherchant cette fois-ci un développant asymptotique à deux termes de $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$. On a

   $$u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \frac{u_n^5}{120} + o\left(u_n^5\right) = u_n\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o\left(u_n^4\right)\right)$$

   donc

   $$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2}\left(1 + \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{15} + o\left(u_n^4\right)\right) \qquad \text{d'où } \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} = \frac{u_n^5}{15} + o\left(u_n^2\right) \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{5n}$$

   Comme précédemment, ces expressions sont les termes généraux de séries qui divergent, et on peut sommer les équivalents, ce qui donne

   $$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - \frac{n}{3} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{3}\right) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{5k} \sim \frac{\ln n}{5}$$

   et finalement,

   $$u_n^2 = \left(\frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5} + o\left(\ln n\right)\right)^{-1}$$

   D'où

   $$\boxed{u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)}$$