Théorème d'Abel

Gourdon, *Analyse*, page 249

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$

Alors

$$\lim_{\substack{s \to 1 \to \\ s \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour majorer $|f(z) - S|$, on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout n. Soit $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$. On a

$$\begin{aligned}
f(z) - S &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^n - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - z^n) = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n
\end{aligned}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. D'après le calcul précédent, pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$,

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \right) \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, |z-1| < \alpha, \quad |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) < \varepsilon$$

Maintenant, si $z \in \Delta_{\theta_0}$, on peut écrire $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $|\varphi| \leq \theta_0$, donc $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2$ et

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos\varphi - \rho}$$

Ansi, si $\rho \leq \cos\theta_0$,

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}$$

En définitive, si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z-1| \leq \inf(\alpha, \cos\theta_0)$, on a alors

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos\theta_0} = \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0} \right)$$

d'où le résultat.

Remarque : La réciproque est <u>fausse</u> : $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ |z| < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{2}$ mais $\sum (-1)^n$ diverge.