Théorème de l'Arc Capable

Ladegaillerie, *Géométrie pour le CAPES de mathématiques*, pages 173-178
Monier, *Géométrie, MPSI-MP*, page 126

Théorème de l'Angle au Centre:
Si M, A, B sont trois points distincts d'un cercle de centre O et T un point de la tangente en A ($T \neq A$), alors l'*angle au centre* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est égal au double de l'*angle inscrit* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et au double de l'*angle de la tangente* $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})\,[2\pi]$$

Preuve :

En effet, la somme des angles orientés du triangle MAO est égale à π :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi\,[2\pi]$$

On a aussi $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM})\,[2\pi]$ car MAO est isocèle, d'où $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M0}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi\,[2\pi]$.

Les mêmes considérations dans le triangle isocèle LOB mènent à l'égalité analogue : $2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi\,[2\pi]$.

En ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = 0\,[2\pi]$$

d'où par la relation de Chasles,

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 0\,[2\pi]$$

ce qui donne la première égalité de l'énoncé.

On a $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AO}) + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \pi + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})\,[2\pi]$. La somme des angles orientés du triangle isocèle AOB étant égale à π, on a : $2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \pi - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})\,[2\pi]$ d'où

$$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \pi + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \pi + \pi - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\,[2\pi]$$

Théorème du Cercle Capable:
Si A et B sont deux points distincts du plan affine euclidien orienté, l'ensemble E_α des points M du plan tels que

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[\pi]$$

est le cercle passant par A et B dont la tangente (AT) en A vérifie $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha\,[\pi]$, privé des points A et B.
Ce cercle s'appelle *cercle capable d'angle* α *du couple* (A, B).

Preuve :

On peut munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ de façon que A et B aient pour coordonnées

$$A(-a, 0)\ ,\ B(a, 0)\ ,\ \text{avec } a \in \mathbb{R}^{+*}$$

En notant z l'affixe d'un point $M(x, y)$, autre que A et B, on a :

$$\begin{aligned}
M \in E_\alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[\pi] \\
&\Longleftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-a}{z+a}\right) = \alpha\,[\pi] \\
&\Longleftrightarrow \quad \arg\left((z-a)(\overline{z}+a)\right) = \alpha\,[\pi] \\
&\Longleftrightarrow \quad \arg\left((z-a)(\overline{z}+a)e^{-i\alpha}\right) = 0\,[\pi] \\
&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im}\left((x+iy-a)(a-iy+a)(\cos\alpha - i\sin\alpha)\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad -(x^2+y^2-a^2)\sin\alpha + 2ay\cos\alpha = 0
\end{aligned}$$

Si $\alpha \equiv 0\,[\pi]$, alors E_α est la droite (AB) (privée de A et B).

Si $\alpha \not\equiv 0\,[\pi]$, alors

$$M \in E_\alpha \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay\,\text{cotan}\alpha - a^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + (y - a\,\text{cotan}\alpha)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \alpha}$$

donc E_λ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre le point de coordonnées $(0, a\,\text{cotan}\alpha)$ et de rayon $\dfrac{\alpha}{|\sin\alpha|}$

De plus, si T est un point de la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$ ($T \neq A$), d'après le théorème de l'angle au centre, on a

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\,[\pi] = \alpha\,[\pi]$$

Théorème de l'Arc Capable:
Soient A et B sont deux points distincts du plan affine euclidien orienté, et soit α un réel ($\alpha \neq 0\,[\pi]$).
L'ensemble F_α des points M du plan tels que

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[2\pi]$$

est l'arc de cercle ouvert $\widetilde{AB}$ du cercle capable $\mathcal{C}$ d'angle α du couple (A, B) qui est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le demi-plan ouvert, délimité par (AB), qui ne contient pas la demi-tangente $[AT)$ au cercle en A, où T est le point de la tangente tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha\,[2\pi]$.
Cet arc est appelé *arc capable d'angle α du couple* (A, B). L'autre arc ouvert $\widetilde{AB}$ est l'arc capable d'angle $\alpha + \pi$ du couple (A, B).

Preuve :
On note $\varepsilon[x]$ le signe d'un réel non nul x. On a l'équivalence :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[2\pi] \iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[\pi] \quad \text{et} \quad \varepsilon\left[\sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\right] = \varepsilon\,[\sin\alpha]$$

La première condition équivaut à l'appartenance de M au cercle capable $\mathcal{C}$ d'angle α. Il suffit donc de vérifier que la deuxième condition équivaut à l'appartenance de M au demi-plan ouvert dont parle le théorème.

On choisit un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{i}$ avec $a = AB$. Comme le déterminant $\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $MA.MB.\sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$, son signe est celui du sinus.

En fonction de $M(x, y)$, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont pour composantes respectives $(-x, -y)$ et $(a - x, -y)$ d'où l'on déduit que $\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = ay$ puis que $\varepsilon\left[\sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\right] = \varepsilon\,[ay] = \varepsilon\,[y]$. La condition cherchée équivaut donc à l'appartenance de M au demi-plan P, délimité par (AB) dans lequel $\varepsilon[y] = \varepsilon[\sin\alpha]$.

Pour tout point T de la tangente en A ($T \neq A$), on a $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha\,[\pi]$. On a donc $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha\,[2\pi]$ si et seulement si on a de plus $\varepsilon\left[\sin(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})\right] = \varepsilon[\sin\alpha]$, ou encore $\varepsilon\left[\det(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})\right] = \varepsilon\,[\sin\alpha]$. En fonction de $T(x, y)$, les composantes de $\overrightarrow{AT}$ sont (x, y) et celles de $\overrightarrow{AB}$ sont $(a, 0)$ et l'on a $\det(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = -ay$. On a donc $\varepsilon\left[\sin(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})\right] = \varepsilon[\sin\alpha]$ si et seulement si T est dans le demi-plan ouvert P_2 où $\varepsilon[y] = -\varepsilon[\sin\alpha]$, c'est-à-dire dans le demi-plan opposé à celui de M.

Cette démonstration reprise avec $\alpha + \pi$, mène à un second arc capable qui est l'intersection du cercle capable d'angle $\alpha + \pi$, qui n'est autre que $\mathcal{C}$ avec le demi-plan ouvert, délimité par (AB), qui ne rencontre pas la demi-tangente $[AT)$ à $\mathcal{C}$ en A, quand $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha + \pi\,[2\pi]$. C'est donc le second arc capable $\widetilde{AB}$ du cercle capable.