Théorèmes de Baire et Applications

Gourdon, *Analyse*, page 391

> **Théorème de Baire :**
> Soit (E,d) un espace métrique complet. Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Soit (E,d) un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E. Pour montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E, il faut montrer que

$$\forall V \text{ ouvert non vide de } E, \quad V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) \neq \emptyset$$

Donnons-nous donc un ouvert non vide V de E. Par récurrence, on va construire une suite (B_n) de boules fermées de E telles que

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, B_n est une boule fermée de rayon non nul et inférieur à $1/2^n$

2. $B_0 \subset O_0 \cap V \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$.

L'ouvert O_0 est dense dans E donc $O_0 \cap V \neq \emptyset$. Or $O_0 \cap V$ est ouvert, il existe donc une boule ouverte $B(x_0,r) \subset O_0 \cap V$. Si B_0 est la boule fermée de centre x_0 et de rayon $\inf(r/2,1)$, on a donc $B_0 \subset O_0 \cap V$.

Supposons les boules $B_0,\ldots,B_n$ construites et vérifiant (1) et (2). L'ouvert O_{n+1} est dense dans E, donc $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$ est un ouvert non vide. Il existe donc une boule ouverte $B(x,r)$ incluse dans $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$. Si B_{n+1} désigne la boue fermée de centre x et de rayon $\inf(r/2, 1/2^{n+1})$, on a donc $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$. Ainsi, B_{n+1} vérifie (1) et (2).

Par construction, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E dont le diamètre tend vers 0. De plus E est complet, il existe donc $x \in E$ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x\}$. Or $B_0 \subset V$, donc $x \in V$. D'après (2), on a aussi $B_n \subset O_n$ pour tout n, donc $x \in O_n$ pour tout n. Ainsi, $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Finalement, nous avons prouvé que V et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ ont au moins un point commun, d'où le théorème.

> **Applications :**
> 1. Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, avec (E,d) est complet. On considère une suite (f_n) d'applications continues de E dans F, convergeant simplement vers une application f de E dans F.
>
>   Alors l'ensemble des points de continuité de f est dense dans E.
>
> 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E \ / \ \forall p \geq n,\ \delta\left(f_n(x), f_p(x)\right) \leq \varepsilon\}$$

Montrons que $\Omega_\varepsilon = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans E et que

$$\forall x_0 \in \Omega_\varepsilon, \exists V \in \mathcal{V}(x_0),\ \forall x \in V,\ \delta\left(f(x_0), f(x)\right) \leq 3\varepsilon$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \geq n$, l'ensemble $G_p = \{x \in E \ / \ \delta\left(f_n(x), f_p(x)\right) \leq \varepsilon\}$ est fermé (car f_n et f_p sont continues) donc $F_{n,\varepsilon} = \bigcap\limits_{p\geq n} G_p$ est fermé.

Par hypothèse, la suite (f_n) converge simplement, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = E$, ce qui entraîne que

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$$

est un ouvert dense dans l'espace complet E.

Ceci étant, soit $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$. Comme f_n est continue, il existe un voisinage V de x_0 inclus dans $\overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ tel que

$$\forall x \in V, \quad \delta\left(f_n(x_0), f_n(x)\right) \leq \varepsilon$$

Or

$$\forall x \in V, \forall p \geq n, \ \delta\left(f_n(x), f_p(x)\right) \leq \varepsilon$$

donc en faisant tendre p vers $+\infty$ (pour x et n fixés), on obtient $\delta(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in V$. Finalement,

$$\forall x \in V, \delta\left(f(x), f(x_0)\right) \leq \delta\left(f(x), f_n(x)\right) + \delta\left(f_n(x), f_n(x_0)\right) + \delta\left(f_n(x_0), f(x_0)\right) \leq 3\varepsilon$$

2. Posons $R = \bigcap\limits_{n \geq 1} \Omega_{1/n}$ et montrons que f est continue en tout point de R. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Comme $x_0 \in \Omega_{1/n}$, d'après le résultat de la question précédente, il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in V, \ \delta\left(f(x), f(x_0)\right) \leq \frac{3}{n} \leq 3\varepsilon$$

Ceci suffit à prouver que f est continue en x_0.

L'ensemble des points de continuité de f contient donc R, intersection dénombrable d'ouverts dense de E, en particulier dense dans E d'après le théorème de Baire.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \end{array}$$

La suite (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers f' sur $\mathbb{R}$. On en déduit d'après ce qui précède que l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R}$ est complet.