Théorème de Banach-Steinhaus

Gourdon, *Analyse*, page 398

> **Théorème :**
> Soit $(E, \| \|_E)$ un espace de Banach et $(F, \| \|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit de plus, A une partie non vide de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Alors :
>
> 1. Ou bien $(\|f\|_L)_{f \in A}$ est borné.
> 2. Ou bien il existe $x \in E$ tel que $\sup\limits_{f \in A} \|f(x)\|_F = +\infty$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $O_k = \left\{ x \in E \;/\; \sup\limits_{f \in A} \|f(x)\|_F > k \right\}$.

  Afin d'appliquer le théorème de Baire, montrons que O_k est un ouvert de E. Pour $g \in A$, définissons $V_g^k = \{x \in E \;/\; \|g(x)\|_F > k\}$. Il est clair que $\bigcup\limits_{g \in A} V_g^k \subset O_k$.

  De plus, si $x \in O_k$, il existe $g \in A$ tel que $\|g(x)\|_F > k$, car sinon, pour tout $f \in A$, on aurait $\|f(x)\|_F \leq k$ et donc $\sup\limits_{f \in A} \|f(x)\|_F \leq k$. Ainsi $O_k \subset \bigcup\limits_{g \in A} V_g^k$, et finalement,

  $$(1) \qquad O_k = \bigcup_{g \in A} V_g^k$$

  Pour $g \in A$, posons $\varphi_g : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|g(x)\|_F \end{array}$. L'application g et l'application $y \mapsto \|y\|_F$ étant continues, il en est donc de même de φ_g. Ainsi, comme $V_g^k = \varphi_g^{-1}(]k, +\infty[)$, V_g^k est un ouvert de E.
  Finalement, l'égalité (1) prouve que O_k est un ouvert de E.

- **1er cas :** pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ouvert O_k est dense dans E.
  L'espace E étant complet, le théorème de Baire prouve alors que $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} O_k$ est dense dans E. En particulier, $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} O_k \neq \emptyset$.
  Soit donc $x_0 \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} O_k$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{f \in A} \|f(x_0)\|_F > k$. A la limite sur k, il vient ainsi que $\sup\limits_{f \in A} \|f(x_0)\|_F = +\infty$.

- **2ème cas :** il existe un entier k_0 tel que O_{k_0} ne soit pas dense dans E. (O_{k_0} peut même être vide).
  Il existe donc $x_1 \in E$ et $r_1 > 0$ tels que $B(x_1, r_1) \cap O_{k_0} = \emptyset$, où

  $$B(x_1, r_1) = \{x \in E \;/\; \|x - x_1\|_E < r_1\}$$

  Ainsi,

  $$(2) \qquad \forall y \in B(x_1, r_1), \forall f \in A,\ \|f(y)\|_F \leq k_0$$

  Soit alors $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$. Soit de plus $f \in A$.
  Comme $\frac{r_1}{2}x + x_1 \in B(x_1, r_1)$, d'après (2), on a $\left\| f\left(\frac{r_1}{2}x + x_1\right) \right\|_F \leq k_0$. Mais la linéarité de f donne $f(x) = \frac{2}{r_1} f\left(\frac{r_1}{2}x + x_1\right) - \frac{2}{r_1} f(x_1)$. De plus, $x_1 \in B(x_1, r_1)$, ainsi $\|f(x_1)\|_F \leq k_0$.
  Finalement, $\|f(x)\|_F \leq \frac{2}{r_1}k_0 + \frac{2}{r_1}k_0 = \frac{4k_0}{r_1} = M$ et donc $\|f\|_L \leq M$. Bref, pour tout $f \in A$, $\|f\|_L \leq M$.
  Finalement, $(\|f\|_L)_{f \in A}$ est borné.

Application 1 : *Soit $(E, \| \|_E)$ un espace de Banach et $(F, \| \|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit de plus (f_n) une suite de $\mathcal{L}_c(E,F)$ convergeant simplement vers $f : E \to F$. Alors $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$.*

En effet, l'application f, limite simple d'applications linéaires, est elle aussi linéaire. La seule difficulté réside dans la continuité de f.

- Soit $A = \{f_n \;/\; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Soit de plus $x \in E$.
  Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_F = 0$, la suite $(\|f_n(x)\|_F)$ est donc bornée et ainsi, $\sup\limits_{g \in A} \|g(x)\|_F < +\infty$.
  D'après le théorème précédent, $(\|g\|_L)_{g \in A}$ est borné : il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout entier n, $\|f_n\|_L \leq M$.
  Finalement, pour tout $x \in E$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\|_F \leq M\|x\|_E$. A la limite sur n, il vient, pour tout x de E, $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$. AInsi, f est continue et $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

Application 2 : *Il existe des fonctions continues différentes de la somme de leur série de Fourier.*

- Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques. Munissons E de la norme $\| \|_\infty$ définie par :
$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$$
Pour $p \in \mathbb{Z}$, posons $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}dt$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $\varphi_n : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \sum\limits_{p=-n}^{n} c_p(f) \end{array}$.
Pour $f \in E$, $\varphi_n(f)$ représente donc la somme partielle de la série de Fourier associée à f, prise au point 0. Il est clair que $\varphi_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$. Par ailleurs, pour $t \in [-\pi,\pi]\backslash\{0\}$, on a
$$\sum_{p=-n}^{n} e^{-ipt} = e^{int}\frac{1-e^{-i(2n+1)t}}{1-e^{-it}} = e^{int}\frac{e^{-i\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}}{e^{-i\frac{t}{2}}}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$
Définissons alors $h_n : \begin{array}{ccc} [-\pi,\pi] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ 2n+1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$. Notons que h_n est continue. Pour $f \in E$, on a donc $\varphi_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h_n(t)f(t)dt$, soit
$$|\varphi_n(f)| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h_n(t)|dt\right)\|f\|_\infty$$
Ainsi, φ_n est continue et $\|\varphi_n\|_L \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|h_n(t)|dt$.

Soit alors $q \in \mathbb{N}$. Soit f_q l'application 2π-périodique définie par : pour tout $t \in [-\pi,\pi]$, $f_q(t) = \dfrac{h_n(t)}{|h_n(t)| + \frac{1}{q}}$. On vérifie sans peine que $f_q \in E$.
Posons $\delta_q = \left|\varphi_n(f_q) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h_n(t)|dt\right|$. Alors
$$\delta_q \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{h_n^2(t) - |h_n(t)|^2 - \frac{1}{q}|h_n(t)|}{|h_n(t)| + \frac{1}{q}}\right|dt \leq \frac{1}{2\pi q}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|h_n(t)|}{|h_n(t)| + \frac{1}{q}}dt \leq \frac{1}{q}$$
Ainsi,
$$(3) \qquad \lim_{q\to+\infty}\varphi_n(f_q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h_n(t)|dt$$
Mais $\varphi_n(f_q) = |\varphi_n(f_q)| \leq \|\varphi_n\|_L\|f_q\|_\infty \leq \|\varphi_n\|_L$ car $\|f_q\|_\infty \leq 1$. A la limite, avec (3), on obtient donc $\|\varphi_n\|_L \geq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|h_n(t)|dt$.

Finalement, $\|\varphi_n\|_L = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|h_n(t)|dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|dt$.

- Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$, on a donc
$$(4) \qquad \|\varphi_n\|_L \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)|}{\left|\frac{t}{2}\right|}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{t}dt \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{|\sin u|}{u}du$$
Or, on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{|\sin u|}{u}du = +\infty$.
D'après (4), on obtient donc
$$(5) \qquad \lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n\|_L = +\infty$$

- Mais $(E, \| \|_\infty)$ est un espace de Banch, aussi le théorème de Banach-Steinhaus s'applique-t-il. D'après (5), $(\|\varphi_n\|_L)$ n'est pas borné : aussi existe-t-il $f_0 \in E$ tel que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|\varphi_n(f_0)| = +\infty$. La série de Fourier de f_0 diverge donc en 0, car sinon, la suite $(\varphi_n(f_0))$ serait convergente et a fortiori bornée. Par conséquent, f_0 diffère de la somme de sa série de Fourier.

- En conclusion, il existe des fonctions continues qui diffèrent de la somme de leur série de Fourier.