Théorème de Bernstein sur les séries entières

Gourdon, *Analyse*, page 247

Théorème : Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[, \quad f^{(2k)}(x) \geq 0$$

Alors f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

Il suffit de montrer que pour tout $b \in]0, a[$, la fonction f est développable en série entière sur $]-b, b[$ (en effet, les coefficients du développement en série entière sur $]-b, b[$ ne dépendent pas de b). Fixons donc $b \in]0, a[$.

Commençons par développer la fonction $F : x \mapsto f(x) + f(-x)$. Cette fonction est paire, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(2k+1)}(0) = 0$, donc en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, b]$

$$F(x) = F(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0) + R_n(x), \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt$$

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(2k)}(0) = 2f^{(2k)}(0) \geq 0$, donc la formule précédente entraîne $0 \leq R_n(b) \leq F(b)$ pour tout n. Pour montrer que $R_n(x)$ tend vers 0 lorsque $0 \leq x < b$, nous comparons sa valeur à $R_n(b)$ en écrivant

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t}\right)^{2n+1} \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt \\ &\leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt \\ &\leq \left(\tfrac{x}{b}\right)^{2n+1} R_n(b) \leq \left(\tfrac{x}{b}\right)^{2n+1} F(b) \end{aligned}$$

(on a utilisé la majoration $\dfrac{x-t}{b-t} \leq \dfrac{x}{b} < 1$ pour tout $t \in [0, x]$, qui provient du caractère décroissant de $t \mapsto \dfrac{x-t}{b-t}$ sur $[0, x]$). Comme $0 \leq \frac{x}{b} < 1$, on en déduit $\lim\limits_{n\infty} R_n(x) = 0$, ce qui s'écrit aussi

$$\forall x \in [0, b[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0)$$

La fonction F est paire, ce résultat vaut donc sur $]-b, b[$.

Il nous reste à montrer le résultat pour f. Fixons $x \in]-b, b[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$f(x) = f(0) + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0) + r_n(x) \qquad \text{avec } r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+2)}(t)dt$$

Comme $0 \leq f^{(2n+2)}(t) \leq f^{(2n+2)}(t) + f^{(2n+2)}(-t) = F^{(2n+2)}(t)$ pour tout t, on a $|r_n(x)| \leq R_n(|x|)$ donc $\lim\limits_{n \in fy} r_n(x) = 0$. Ainsi, en notant

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0)$$

nous venons de montrer que

$$\lim_{n\infty} S_{2n+1}(x) = f(x)$$

Or

$$S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}f^{(2n)}(0) = \frac{1}{2}\frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0)$$

donc $\lim\limits_{n\infty} S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = 0$, et on déduit que $\lim\limits_{n\infty} S_{2n}(x) = f(x)$. Donc, on a $\lim\limits_{n\infty} S_n(x) = f(x)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in]-b, b[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

d'où le résultat.

Exemple : Soit $f = \tan$ définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction f' satisfait les hypothèses précédentes, et on en déduit que f', et donc f, sont développables en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.