Théorème de D'Alembert-Gauss

Gozard, *Théorie de Galois*, page 62

Théorème : Le corps $\mathbb{C}$ des complexes est algébriquement clos. Autrement dit, tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 à coeeficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

1ère méthode :

Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Notons

$$P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0, \quad a_k \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$|P(z)| = |a_n||z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right|$$

donc $|P(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$, donc

$$\exists R > 0 \ / \ |z| > R \Rightarrow |P(z)| > |P(0)| + 1$$

Or $z \mapsto |P(z)|$ est continue sur $\mathbb{C}$, et $K = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq R\}$ est un fermé borné donc un compact de $\mathbb{C}$. Donc la restriction de $z \mapsto |P(z)|$ à K admet une borne inférieure m atteinte en au moins un point $z_0 \in K$. Pour $z \notin K, |P(z)| > |P(0)| + 1 > |P(0)| \geq m$, et pour $z \in K, |P(z)| \geq m$. Donc

$$(1) \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \ |P(z)| \geq m$$

Par la formule de Taylor, il existe $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$P(z_0 + X) = b_n X^n + \ldots + b_1 X + b_0$$

On a alors $b_0 = P(z_0)$, et $b_n \neq 0$ car $\deg(P) = n$.

Soit $k = \min\{j \in \{1, \ldots, n\} \ / \ b_j \neq 0\}$. Supposons $b_0 \neq 0$. Fixons ω une racine k-ième du nombre complexe $-\frac{b_0}{b_k}$. Alors $P(z_0 + \omega t) = b_0(1 - t^k + t^k \varepsilon(t))$ où ε est clairement une fonction de limite nulle en 0. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $|t| < \alpha \Rightarrow |\varepsilon(t)| < 1$. Prenant t réel avec $0 < t < 1$ et $t < \alpha$, on a

$$|P(z_0 + \omega t)| \leq |b_0| \left(1 - t^k + t^k |\varepsilon(t)|\right) < |b_0| = m$$

ce qui contredit manifestement (1). Ainsi $b_0 = 0$, c'est-à-dire $P(z_0) = 0$.

2ème méthode :

Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré ≥ 1. Supposons que $P(X)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$. Alors la fonction $z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ est entière. Comme elle tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$, elle est bonrée.

On on a le Théorème de Liouville :

Toute fonction entière bornée est constante.

Cette fonction est donc constante. Donc la fonction $z \mapsto P(z)$ est constante sur $\mathbb{C}$. C'est absurde, puisque $\deg(P) \geq 1$.