Théorème de Darboux

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, page 238

Théorème : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

1ère méthode :

L'ensemble $f'(I)$ est un intervalle s'il contient $[\alpha, \beta]$ dès que α et β sont dans $f'(I)$.

Soit $a < b$ deux points de I et λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On va montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f'(x) = \lambda$. En vertu de la formule des accroissements finis, il nous suffit de montrer qu'il existe deux points du graphe de f définissant un segment de pente λ. On va alors s'intéresser aux pentes des segments issus des deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

On pose $\varphi(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ pour $t \in]a, b]$ et $\psi(t) = \dfrac{f(b) - f(t)}{b - t}$ pour $t \in [a, b[$. En fait, φ (resp. ψ) se prolonge en a (resp. en b) par $\varphi(a) = f'(a)$ (resp. $\psi(b) = f'(b)$) et sont donc continues sur $[a, b]$. Les images de l'intervalle $[a, b]$ par les applications φ et ψ sont donc deux intervalles qui contiennent respectivement $f'(a)$ et $f'(b)$ et qui se coupent puisqu'ils contiennent tous les deux $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \varphi(b) = \psi(a)$. Par conséquent, leur réunion est un intervalle qui contient l'intervalle délimité par $f'(a)$ et $f'(b)$. En particulier, l'un des deux au moins contient λ. La formule des accroissements finix permet de conclure.

2ème méthode :

Posons $T = \{(x, y) \in I^2, y < x\}$ et soit $\psi : T \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

On a

$$\psi(T) \subset f'(I) \subset \overline{\psi(T)}$$

La première inclusion provient de la formule des accroissements finis, et la seconde de la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissements. Or T est connexe (et même convexe) et ψ est continue. Donc $\psi(T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et son adhérence $\overline{\psi(T)}$ est l'intervalle fermé qui a les mêmes extrémités. Dans ces conditions, $f'(I)$ ne peut être qu'un intervalle.