Théorèmes de Désargues et Pappus

Laville, *Géométrie pour CAPES/Agrégation*, page 189

Théorème de Désargues, version affine :
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles dans le plan affine, sans sommets communs et tels que

$$(AB)//(A'B') \quad , \quad (BC)//(B'C') \quad , \quad (CA)//(C'A')$$

Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Réciproquement, si

$$(AB)//(A'B'), (BC)//(B'C') \quad \text{et} \quad (AA'), (BB'), (CC') \text{ parallèles ou concourantes}$$

Alors $(AC)//(A'C')$.

Preuve :

1er cas : supposons que les droites (AA') et (BB') se coupent en O.
Montrons que (CC') passe aussi par O. Considérons l'homothétie h de centre O telle que $h(A) = A'$.
$(AB)//(A'B')$ donc $h(AB) = A'B'$.
De plus (O, B, B') alignés, donc $h(B) = B'$.

$(BC)//(B'C')$ donc $h(BC) = B'C'$.
$(AC)//(A'C')$ donc $h(AC) = (A'C')$.
L'image de l'intersection C de (AC) et de (BC) est l'intersection de $(A'C')$ et $(B'C')$ donc C'.
Ainsi, O, C et $C' = h(C)$ sont donc alignés.

2ème cas : si (AA') et (BB') sont parallèles.
Alors, on fait la même démonstration en prenant la translation t telle que $t(A) = A'$.

Pour la réciproque, la démonstration consiste à utiliser la même homothétie ou translation.

Théorème de Désargues, version projective :
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles dans l'espace projectif, sans sommets communs et tels que les droites (AA'), (BB'), (CC') soient distinctes. On note :

$$P = (BC) \cap (B'C') \quad , \quad Q = (CA) \cap (C'A') \quad , \quad R = (AB) \cap (A'B')$$

Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si (AA'),(BB'),(CC') sont concourantes.

Preuve :

Si on est dans l'espace projectif de dimension 2, on passe du plan projectif au plan affine en choisissant la droite (PQ) comme droite de l'infini. Alors l'équivalence de l'énoncé est traduite par le théorème version affine.

Supposons l'espace projectif de dimension ≥ 3.
Si les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes, considérons les plans π défini par ABC et π' par $A'B'C'$, $\pi \neq \pi'$.
Soit $\Delta = \pi \cap \pi'$. Alors $(AB) \subset \pi$, $(A'B') \subset \pi'$ donc $R = (AB) \cap (A'B') \in \Delta$. De même pour P et Q.

Réciproquement, si les points P, Q, R sont alignés, (RA) et (RA') déterminent un plan, dans ce plan les droites (AA') et (BB') se coupent en un point O. Considérons la perspective ω (c'est-à-dire la projection de centre O sur le plan π') :

$$\omega(P) = P \quad , \quad \omega(Q) = Q \quad , \quad \omega(R) = R \quad , \quad \omega(A) = A' \quad , \quad \omega(B) = B'$$

Donc $\Omega(\,(AQ)\,) = (A'Q)$ et $\omega(\,(BP)\,) = (B'P)$.
Ainsi :

$$\omega(C) = \omega(\,(AQ) \cap (BP)\,) = (A'Q) \cap (B'P) = C'$$

Théorème de Pappus, version affine :
Soient D et D' deux droites affines distinctes dans un plan affine, dont le corps associé est commutatif.
Soient $A, B, C \in D$ et $A', B', C' \in D'$ tels que $(AB')//(A'B)$ et $(BC')//(B'C)$.
Alors, $(CA')//(C'A)$.

Preuve :

1er cas : supposons D non parallèle à D'. Posons $O = D \cap D'$
Soit h_1 l'homothétie de centre O telle que $h_1(A) = B$.
Soit h_2 l'homothétie de centre O telle que $h_2(B) = C$.
Alors $h_1(B') = A'$ (car $(AB')//(BA')$) et $h_2(C') = B'$ car $(BC')//(B'C)$.
Comme $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$. Posons h_3 cette homothétie.
$h_3(A) = h_2 \circ h_1(A) = h_2(B) = C$.
$h_3(C') = h_1 \circ h_2(C') = h_1(B') = A'$.
Finalement (AC') a pour image $(A'C)$. L'homothétie conserve le parallélisme, d'où le résultat.

2ème cas : supposons D parallèle à D'.
On procède de la même manière en composant les translations de vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$.
On a alors :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{C'A'}$$

donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}$. Finalement, $(AC')//(A'C)$.

Théorème de Pappus, version projective :
Soient D et D' deux droites projectives distinctes dans le plan projectif. Supposons que $A, B, C \in D \backslash D'$ et $A', B', C' \in D' \backslash D$, A, B, C distincts 2 à 2, A', B', C' distincts 2 à 2.
Alors les points $(AB') \cap (A'B)$, $(BC') \cap (B'C)$ et $(CA') \cap (C'A)$ sont alignés.

Preuve :

On note :

$$\alpha = (AB') \cap (A'B) \quad , \quad \beta = (BC') \cap (B'C) \quad , \quad \gamma = (CA') \cap (C'A)$$

On passe du plan projectif au plan affine en choisissant la droite $(\alpha\beta)$ comme droite à l'infini. On obtient alors dans le plan affine :

$$(AB')//(A'B) \quad \text{et} \quad (BC')//(B'C)$$

On applique le théorème de Pappus dans le cas affine : $(CA')//(C'A)$. On repasse à l'espace projectif par complétion projective du plan affine. Donc $\gamma = (CA') \cap (C'A)$ appartient à la droite des points de l'infini, c'est-à-dire la droite projective $(\alpha\beta)$.
Finalement, α, β et γ sont alignés.