Théorèmes de Dini

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 2*, page 155
Nourdin, *Agrégation de Mathématiques, Epreuve Orale.*, page 109

Théorème : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue f.

1. Si chaque fonction f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.
2. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, *i.e.* $f_n \leq f_{n+1}$, alors la convergence est uniforme.

1. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$. D'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue. Considérons $\eta > 0$ un module d'uniforme continuité de f pour ε et $S = (a = a_0 < a_1 < \dots a_{n-1} < a_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$ de pas inférieur à η. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pout tout entier $n \geq n_0$ et tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $|f(a_i) - f_n(a_i)| \leq \varepsilon$. Soit $n \geq n_0$ et $x \in [a,b]$. Supposons $a_i \leq x \leq a_{i+1}$ avec $0 \leq i \leq n-i$. On a $|f(x) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ et on peut alors écrire :

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f_n(x)| & \leq & |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f_n(x)| \\ & \leq & \varepsilon + \varepsilon + (f_n(x) - f_n(a_i)) \\ & \leq & 2\varepsilon + f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i) \qquad (\text{car } f_n \text{ est croissante}) \\ & \leq & 2\varepsilon + |f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)| \\ & \leq & 5\varepsilon \end{array}$$

La convergence est donc uniforme.

2. Posons pour $n \geq 0$, $g_n = f - f_n \geq 0$. Alors (g_n) est une suite décroissante de fonctions continues qui converge simplement vers la fonction nulle. Notons $\alpha_n = \|g_n\|_\infty$. Il s'agit de prouver que cette suite converge vers 0. Comme $\alpha_n = \sup\limits_{x\in[a,b]} g_n(x)$, la suite (α_n) est décroissante et positive. Elle est donc convergente vers un réel $\alpha \geq 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons $\alpha > 0$. Considérons pour $n \geq 0$ les parties

$$K_n = \{x \in [a,b] \ , \ g_n(x) \geq \frac{\alpha}{2}$$

Chaque partie K_n est non vide, bornée car contenue dans $[a,b]$, et en tant qu'image réciproque du fermé $[\frac{\alpha}{2}, +\infty[$ par la fonction continue g_n, K_n est fermée dans $[a,b]$ donc dans $\mathbb{R}$. Comme $g_{n+1} \leq g_n$, on a $K_{n+1} \subset K_n$. Il s'ensuit, par le théorème des compacts emboîtés, que $\bigcap\limits_{n\geq 0} K_n$ est non vide. Il existe donc c appartenant à tout K_n et par conséquent tel que $g_n(c) \geq \frac{\alpha}{2}$ pour tout n, ce qui contredit la convergence simple vers 0.

Application : Théorème de Glinveko-Cantelli
Supposons $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. Notons F la fonction de répartition commune des X_n et posons si $t \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{]-\infty,t]}(X_k)$$

Alors, presque sûrement, on a :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \underset{n\infty}{\rightarrow} 0$$

Commençons par faire deux remarques. Premièrement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $nF_n(t)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, F(t))$. Deuxièmement, d'après la loi forte des grands nombres, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé $F_n(t) \to F(t)$ *p.s.*

Reste à voir que la convergence est uniforme en t. Si $n \geq 1$, on pose

$$V_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|$$

Lemme : *Si on définit $F^{\leftarrow}$ sur $[0,1]$ par $F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \ , \ F(x) \geq u\}$, on a la propriété*

$$F^{\leftarrow}(u) \leq x \iff u \leq F(x)$$

valable pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $u \in [0,1]$.

Corollaire : *Soit Y une v.a.r. de fonction de répartition G et soit U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0,1])$ a même loi que Y.*

Il suffit d'écrire

$$\mathbb{P}(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq G(x)) = G(x)$$

Soit $(U_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi $\mathcal{U}([0,1])$. On a :

$$V_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(X_i \leq t)} - F(t) \right| \overset{loi}{=} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(F^{\leftarrow}(U_i) \leq t)} - F(t) \right| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i \leq F(t))} - F(t) \right|$$

Si on pose $s = F(t)$, il vient :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i \leq F(t))} - F(t) \right| = \sup_{s \in F(\mathbb{R})} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i \leq s)} - s \right| \leq \sup_{s \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i \leq s)} - s \right|$$

Ainsi, il suffit de montrer que le théorème de Glivenko-Cantelli est vrai dans le cas particulier où les $X_i (= U_i)$ sont des lois uniformes sur $[0,1]$. Grâce à la loi des grands nombres, on sait que pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe un ensemble négligeable N_s de Ω vérifiant :

$$\forall \omega \in \Omega \backslash N_s \quad : \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq s)} \longrightarrow s$$

Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore négligeable, on en déduit l'existence d'une partie négligeable N de Ω vérifiant :

$$\forall \omega \in \Omega \backslash N, \quad \forall s \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \quad : \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq s)} \longrightarrow s$$

En fait, la croissance de $s \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq s)}$ fait que l'on a :

$$\forall \omega \in \Omega \backslash N, \quad \forall s \in [0,1] \quad : \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq s)} \longrightarrow s$$

(en effet, si $s \in [0,1]$ et $\omega \in \Omega \backslash N$, on se donne une suite croissante (resp. décroissante) (s_n) (resp. (t_n)) de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ qui croît (resp. décroît) vers s ; on a alors, pour k fixé et $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq s_k)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq s)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq t_k)}$$

ce qui, en faisant $n \to \infty$ nous permet d'obtenir :

$$s_k \leq \liminf_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq s)} \leq \limsup_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq s)} \leq t_k$$

On conclut alors en faisant $k \to \infty$)

Pour chaque $\omega \in \Omega \backslash N$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i(\omega) \leq s)}$ converge donc simplement vers s sur $[0,1]$. En fait, la convergence est uniforme grâce au théorème de Dini. Ceci achève la démonstration.